Berlyn 1967

K. H. Mutter

# Crossingrelationen für die Partialwellenamplituden des $s$ , $u$ - und t-Kanals und die Racahkoeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe

Inaugural-Dissertation

zur

Erlangung der Doktorwürde

der

Mathematisch-Naturwissenschaftlichen Fakultät

der Freien Universität Berlin

vorgelegt von

Karl-Heinz Mütter

aus Kleve

1. Referent Prof. Dr. H. JOOS

2. Referent Prof. Dr. W. THEIS

Tag der mündlichen Prüfung: 16.9.1966

Tag der Promotion: 15. FEB. 1967

UNIVERSITEITSBIBLIOTHEEK - LEIDEN -

Inhaltsverzeichnis

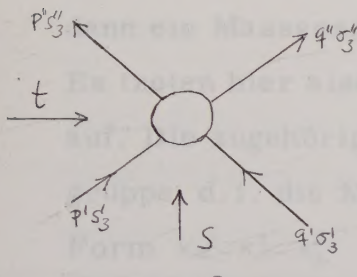

| | | Seite |
|---|---|---|
| Einleitung | | 1 |
| Kap. 1 | Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe | 4 |
| Kap. 2 | Asymptotisches Verhalten, Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen und andere Eigenschaften der dreidimensionalen Lorentzgruppe | 7 |
| Kap. 3 | Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe | 11 |
| Kap. 4 | Vollständige Spinorbasen und kinematische Singularitäten | 17 |
| a) | Die explizite Konstruktion des vollständigen Systems von Kovarianten | 18 |
| b) | Die Spinorbasis I | 20 |
| c) | Die Spinorbasis II | 23 |
| d) | Kinematische Pole | 24 |
| Kap. 5 | Einfache Dispersionsrelationen für die invarianten Amplituden | 26 |
| a) | Reduktionsformalismus | 26 |
| b) | Dispersionsrelationen | 29 |
| Kap. 6 | Partialwellenentwicklung im unphysikalischen Bereich des t-Kanals | 32 |
| a) | Der spinlose Fall | 32 |
| b) | Ausreduktion des Stromkommutatormatrixelementes | 36 |
| c) | Sommerfeld-Watson-Formel, Regge-Pole, Nonsense-Zustände und ihre gruppentheoretische Interpretation | 40 |
| Kap. 7 | Kinematische Singularitäten in der t-Ebene | 42 |
| a) | Partialwellenanalyse im $s$ -Kanal | 42 |
| b) | Die Umkopplungskoeffizienten der beiden kovarianten Entwicklungen (4, 23) | 44 |
| Kap. 8 | Paritätsinvarianz | 49 |
| Kap. 9 | Die Racahkoeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe | 53 |
| Kap. 10 | Crossingrelationen für die Partialwellenamplituden des $s$ , - $u$ - und t-Kanals | 57 |
| a) | Analytische Fortsetzung der Partialwellenamplituden des t-Kanals | 57 |
| b) | Beispiel | 60 |
| Zusammenfassung | | 64 |
| Anmerkungen und Literatur | | 65 |

## Einleitung

Die vorliegende Arbeit ist als eine Weiterführung der Arbeit von H. Joos: "Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe als Grundlage quantenmechanischer Kinematik gedacht [1]. In jener Arbeit wurden die Darstellungen zur Masse $P_\mu P^\mu = M^2 > 0$ (*) untersucht und die Clebsch-Gordan-Koeffizienten für die Ausreduktion der Produktdarstellung:

$$(M', S', \varepsilon' = \pm 1) \times (M'', S'', \varepsilon'' = \pm 1) \qquad (*) \qquad \varepsilon' = \frac{P_0'}{|P_0'|} \qquad \varepsilon'' = \frac{P_0''}{|P_0''|}$$

berechnet. Ihre wichtigste Anwendung finden diese Koeffizienten bei der Partialwellenanalyse lorentzinvarianter T-Matrixelemente; dabei




$s = (p' + q')^2$

$t = (p' - p'')^2$

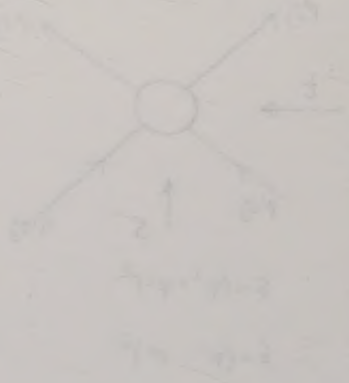
hat man bekanntlich für den Fall von zwei ein- und zwei auslaufenden Teilchen folgendes Kopplungsschema: Man reduziert die einlaufenden ( $p's_3'$ und $q'\sigma_3'$ ) *) und die auslaufenden ( $p''s_3''$ und $q''\sigma_3''$ ) *) Zustände getrennt nach Zuständen mit dem Gesamtimpuls $P' = p' + q'$ bzw. $P'' = p'' + q''$ und dem Gesamtdrehimpuls j im CMS mit den 3-Komponenten $m'$ bzw. $m''$ aus, die zu irreduziblen Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe zur Masse

$P'^2 = (p'+q')^2 \geq (M'+\mu')^2$ , $P''^2 = (p''+q'')^2 \geq (M''+\mu'')^2$ ; $P'^2 = M'^2$, $q'^2 = \mu'^2$, $P''^2 = M''^2$, $q''^2 = \mu''^2$ führen.

Die zu solchen Massen gehörige kleine Gruppe ist die Drehgruppe; aus ihren Darstellungsmatrizen lassen sich mit der Methode der induzierten Darstellungen [10], insbesondere dem Kronecker Produkttheorem [10], die Clebsch-Gordan-Koeffizienten zur Masse $(P'+q')^2 \geq (M'+\mu')^2$

---

*) Die Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe werden durch die folgenden Invarianten charakterisiert : das Massenquadrat $M^2 = P_\mu P^\mu$ , den Spin S, und falls $M^2 > 0$ durch $\varepsilon = \frac{P_0}{|P_0|}$ die Zustände die diese Darstellungen aufbauen, durch den Impuls $P$ und die 3-Komponente des Spins $S_3$ , die hier manchmal auch mit $m$ bezeichnet wird.



konstruieren. Auf die T-Matrixelemente zwischen den ausreduzierten Zuständen ($p' m'$ bzw. $p'' m''$) kann man dann ein Analogon des Wigner-Eckart-Theorems für die unitären Darstellungen der iLg anwenden. So gelangt man zur "Partialwellenanalyse im physikalischen Bereich des s-Kanals".

Es gibt jedoch noch andere Möglichkeiten, die vier Zustände in unserem T-Matrixelement, das immer im physikalischen Bereich des s-Kanals betrachtet werde, zu einer Invarianten zusammenzukoppeln. Nehmen wir z.B. jeweils einen ein- und einen auslaufenden Zustand ($p' s_3'$ und $p'' s_3''$), ($q' \sigma_3'$ und $q'' \sigma_3''$) und reduzieren diese nach Zuständen irreduzibler unitärer Darstellungen der iLg aus; diese haben dann ein Massenspektrum $(p'-p'')^2 \leq (M'-M'')^2$ bzw. $(q'-q'')^2 \leq (\mu'-\mu'')^2$. Es treten hier also auch Darstellungen zu negativen Massenquadraten auf. Die zugehörige kleine Gruppe ist die dreidimensionale Lorentzgruppe; d.i. die Menge der Transformationen, die die quadratische Form $x_0^2 - x_1^2 - x_2^2$ invariant lassen. Ihre Dastellungsmatrizen werden in Kap. 2 untersucht und zur Konstruktion der Clebsch-Gordan-Koeffizienten zur Masse $(p'-p'')^2 \leq 0$ in Kap. 3 verwandt. Die Entwicklung des T-Matrix-Elementes nach Darstellungen zur Masse $t = (p'-p'')^2 \leq 0$ könnte man als "Partialwellenanalyse im unphysikalischen Bereich $(t \leq 0, s \geq (M'+\mu')^2)$ *) des t-Kanals" auffassen; ihre reduzierten Matrixelemente gehen durch analytische Fortsetzung - falls eine solche existiert - aus den Partialwellenamplituden des t-Kanals hervor, wie in Kap. 9 gezeigt werden soll.

Für $s \geq (M'+\mu')^2$, $t \leq 0$ haben wir so zwei Entwicklungen des T-Matrixelementes nach unitären Darstellungen des iLg, eine Partialwellenanalyse im physikalischen Bereich des s-Kanals, eine zweite im unphysikalischen Bereich des t-Kanals.

---

*) Dieser Bereich ist unphysikalisch, wenn man ihn vom t-Kanal aus betrachtet, dagegen physikalisch, wenn man ihn vom s-Kanal her ansieht.

Man kann diese beiden Entwicklungen auch als Zerlegungen des T-Matrixelementes nach invarianten Amplituden auffassen. Sie zeichnen sich gegenüber anderen solchen Entwicklungen dadurch aus, daß ihre invarianten Amplituden - das sind hier also die reduzierten Matrixelemente oder Partialwellenamplituden - nur von einer der beiden kinematischen Variablen $s = (p'+q')^2$ oder $t = (p'-p'')^2$ abhängen und ihre Kovarianten unitäre Darstellungsmatrizen sind. So steht die gesamte t- (bwz. s-) Abhängigkeit bei der Partialwellenanalyse im s-(bzw. t-) Kanal ausschließlich in den explizit bekannten Kovarianten. Solche Partial wellenanalysen eigenen sich daher besonders gut zur Untersuchung sogenannter kinematischer Singularitäten, die in den Kap. 4 bis 8 behandelt werden.

Schließlich besteht noch ein enger gruppentheoretischer Zusammenhang zwischen den reduzierten Matrixelementen unserer beiden Partialwellenanalysen im s- und t-Kanal. Ihr Unterschied liegt allein in der Art der Kopplung der vier Zustände $p' s_3'$ , $q' \sigma_3'$ , $p'' s_3''$ , $q'' \sigma_3''$ zu einer Invarianten. Ihr Zusammenhang wird daher durch Umkopplungskoeffizienten gegeben, die genau den Racahkoeffizienten bei den bekannten Umkopplungsproblemen der Drehgruppe entsprechen. Die Racahkoeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe liefern somit die allgemeine Lösung eines bekannten Problems, das bei allen $N/D$ - und Bootstraprechnungen auftritt: "Wie berechne ich aus den "rechten" Schnitten der Partialwellenamplituden des s-Kanals die "linken" Schnitte der Partialwellenamplituden des t-Kanals?"

## 1. Kap. Zur Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe $\mathcal{IL}_g$

Eine Basis der Liealgebra der inhomogenen Lorentzgruppe bilden die Impuls- und Drehimpulsoperatoren $\mathbb{P}_\mu$ , $\mathbb{M}_{\mu\nu}, \mu,\nu = 0, 1, 2, 3$. Für die Operatoren $W_\mu = \frac{1}{2}\varepsilon_\mu{}^{\nu\rho\sigma}\mathbb{M}_{\nu\rho}\mathbb{P}_\sigma$ und $\mathbb{P}_\mu$ gelten die Vertauschungsregeln:

$$[\mathbb{P}_\mu, \mathbb{P}_\nu] = 0 \quad , \quad [W_\mu, \mathbb{P}_\lambda] = 0 \quad , \quad [W_\mu, W_\nu] = i\varepsilon_{\mu\nu}{}^{\rho\sigma} W_\rho \mathbb{P}_\sigma \tag{1,1}$$

Die Operatoren $W^2$ , $\mathbb{P}^2$ und für $P^2 > 0$ auch $\mathrm{Sig}\, P_0 = \varepsilon = \pm 1$ sind Invarianten. Ihre Eigenwerte können nach dem Schurschen Lemma zur Charakterisierung der irreduziblen Darstellungen benutzt werden. Die Operatoren $\mathbb{P}_\mu$ und einer der Operatoren $W_\mu$ bilden zusammen eine vollständige Abelsche Subalgebra. Wir können sie immer simultan auf Hauptachse transformieren und die Eigenzustände eindeutig durch den Satz ihrer Eigenwerte charakterisieren.

Betrachten wir den Eigenraum zum Eigenwert $P$ von $\mathbb{P}$ . Ist dann $W_\mu(P)$ der auf diesen Eigenraum zu $P$ eingeschränkte Operator so folgt aus den Vertauschungsregeln $P^\mu W_\mu(P) = 0$ . Sei $n_i^\alpha(P)$ ein orthonormales Dreibein zu $P$ : $(n^\alpha(P), n^\beta(P)) = g^{\alpha\beta}$ , $\alpha,\beta = 0,1,2,3$

$$n^0(P) = \frac{P}{|P|} \text{ falls } P^2 > 0, \text{ so daß } W_\mu(P) = \sum_{i=1}^{3} S_i(P)\, n_\mu^i(P) \tag{1,2}$$

$$n^3(P) = \frac{P}{|P|} \text{ falls } P^2 < 0, \text{ so daß } W_\mu(P) = \sum_{\alpha=0}^{2} S_\alpha(P)\, n_\mu^\alpha(P) \tag{1,2'}$$

Für $P^2 > 0$ erfüllen die $S_i(P)$ , i = 1, 2, 3 die Vertauschungsregeln der infinitesimalen Operatoren der Drehgruppe. Die Basis des Eigenraumes zu $P$ können wir durch die Eigenwerte von $S_3(P)$ und $S^2(P) = -W_\mu(P)W^\mu(P)$ charakterisieren. Dies führt zur kanonischen Basis[1]:

$$U(\Lambda)\,|P^2, S, \varepsilon, P S_3\rangle = |P^2, S, \varepsilon, \Lambda P, \bar{S}_3\rangle\, \mathcal{D}^S_{\bar{S}_3 S_3}\left(R(\Lambda, P)\right) \tag{1,3}$$

$$R(\Lambda,P) = L(\Lambda P)\,\Lambda\,L^{-1}(P) \tag{1,4}$$

$L(P)P = (\sqrt{P^2}, \vec{0})$ ist eine reine Lorentztransformation

$$U(a)\,|P^2, S, \varepsilon; P S_3\rangle = e^{iPa}\,|P^2, S, \varepsilon; P S_3\rangle \tag{1,5}$$

$$\langle P^2 S\varepsilon; P S_3 \,|\, P^2 S\varepsilon; P' S_3'\rangle = 2|P_0|\,\delta^3(\vec{P}-\vec{P}')\,\delta_{S_3 S_3'} \tag{1,6}$$

Für $P^2 < 0$ erhalten wir die Vertauschungsregeln für die infinitesimalen Operatoren der dreidimensionalen Lorentzgruppe[2]:

$$[S_0(P), S_1(P)] = \sqrt{-P^2}\,S_2(P)\,,\quad [S_1(P), S_2(P)] = -\sqrt{-P^2}\,S_0(P),\quad [S_2(P), S_0(P)] = \sqrt{-P^2}\,S_1(P) \tag{1,7}$$

Die Basis des Eigenraumes zu $P$ kann nun durch die Eigenwerte von $S_0(P)$ und $S^2(P) = W_\mu(P)\,W^\mu(P) = S^2(P) - S_1^2(P) - S_2^2(P)$ klassifiziert werden:

$$S^2(P)\,|P^2, \ell; P m\rangle = \ell(\ell+1)\,|P^2, \ell; P m\rangle \tag{1,8}$$

$$S_0(P)\,|P^2, \ell; P m\rangle = m\,|P^2, \ell; P m\rangle \tag{1,9}$$

Die Vertauschungsregeln liefern, genau wie bei der Drehgruppe, Auf- und Absteigeoperatoren $S_\pm = S_1 \pm i S_2$ und man kann die Werte

$m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$ oder $m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$

annehmen. Die Matrixelemente der Erzeugungsoperatoren[3] haben eine ähnliche Gestalt wie bei der Drehgruppe

$$(S_0)_{m m'} = m\,\delta_{m m'},\quad (S_+)_{m m'} = a_m\,\delta_{m\,m+1},\quad (S_-)_{m m'} = b_m\,\delta_{m+1, m'}$$

$$(S^2)_{m m'} = \ell(\ell+1),\quad a_m\,b_m = m(m+1) - \ell(\ell+1)$$

So lange wir keine Unitarität fordern, kann $\ell(\ell+1)$ jeden beliebigen komplexen Wert annehmen. Die Unitarität führt zu der folgenden Einschränkung:

$S_+$ und $S_-$ hermitesch konjugiert : $a_m = b_m^*$

Die unitären Darstellungen [4] werden dann durch die folgenden Werte in der $\ell$ -Ebene charakterisiert: $|a_m|^2 = m(m+1) - \ell(\ell+1) \geq 0$

1. $\ell = -\frac{1}{2} + i\rho \qquad -\infty < \rho < \infty$ falls $m = \pm\frac{1}{2}, \pm\frac{3}{2}, \ldots$

   "continuous half integral class"

2. $\ell = -\frac{1}{2} + i\rho$ für $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

   "continuous integral class"

3. $-1 < \ell < 0$ nur für $m = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots$

   "exceptional class"

Für $\ell$ ganz oder halbzahlig ist die zugehörige Darstellung der dreidimensionalen Lorentzgruppe $L_3$ nicht mehr irreduzibel, denn für $m = \ell$ oder $m = -\ell-1$ ist $|a_m|^2 = |b_m|^2 = 0$. Sie zerfällt in drei Teile:

$m \leq -\ell-1 \qquad -\ell \leq m \leq \ell \qquad m \geq \ell+1$

Die erste und die letzte Darstellung sind unendlichdimensional und unitär, die zweite ist endlichdimensional und nicht unitär.

4. $\ell = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \qquad m = -\ell-1, -\ell-2, \ldots$

   "negativ discrete class"

5. $\ell = -\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, \ldots \qquad m = \ell+1, \ell+2, \ldots$

   "positiv discrete class"

Die unitären Darstellungen zu $\ell$ und $-\ell-1$ sind äquivalent.

## 2. Kap. Asymptotisches Verhalten, Orthogonalitäts und Vollständigkeitsrelationen und andere Eigenschaften der Darstellungsmatrizen der dreidimensionalen Lorentzgruppe.

Parametrisieren wir die dreidimensionale Lorentzgruppe $L_3$ durch die "Eulerschen Winkel im pseudoeuklidischen Raum [5]" $\varphi$, $\vartheta$, $\psi$ so nehmen die Elemente der zugehörigen Spinorgruppe *) die Form an:

$$a = \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\varphi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\varphi}{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \cosh\frac{\vartheta}{2} & \sinh\frac{\vartheta}{2} \\ \sinh\frac{\vartheta}{2} & \cosh\frac{\vartheta}{2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e^{-i\frac{\psi}{2}} & 0 \\ 0 & e^{i\frac{\psi}{2}} \end{pmatrix}$$

$$-\infty < \vartheta < \infty \qquad 0 \le \varphi < 2\pi \qquad 0 \le \psi < 2\pi$$

Für die Darstellungsmatrizen:

$$\mathcal{D}^{\ell}_{mn}(a) = e^{-im\varphi}\, d^{\ell}_{mn}(z)\, e^{-in\psi} \qquad z = \cosh\frac{\vartheta}{2} \qquad (2,1)$$

gilt dann nach BARGMANN:

für $m \ge n$

$$d^{\ell}_{mn}(z) = \Theta_{mn}(\ell) \left(\frac{z+1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}} \left(\frac{z-1}{2}\right)^{\frac{m-n}{2}} F\left(-\ell+m, \ell+1+m, 1+m-n, \frac{1-z}{2}\right)$$

für $m \le n$

$$d^{\ell}_{mn}(z) = \Theta_{mn}(\ell) \left(\frac{z+1}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}} \left(\frac{z-1}{2}\right)^{\frac{m-n}{2}} F\left(-\ell+n, \ell+1+n, 1+n-m, \frac{1-z}{2}\right)$$

$$\Theta_{n+h,n}(\ell) = \frac{1}{h!} \prod_{j=1}^{h} \left(-\ell(\ell+1) + (n+j)(n+j-1)\right)^{1/2}, \quad \Theta_{nn} = 1$$

$$\Theta_{n-h,n}(\ell) = (-1)^h\, \Theta_{n,n-h}(\ell) \qquad (2,2)$$

---

*) Die homogene Lorentzgruppe ist homomorph der SL(2C), der Gruppe der unimodularen komplexen 2x2 Matrizen. Schränkt man die homogene Lorentzgruppe auf die dreidimensionale Lorentzgruppe ein, so wird diese abgebildet auf die Gruppe der 2x2 Matrizen $a = \begin{pmatrix} \alpha & \beta \\ \bar{\beta} & \bar{\alpha} \end{pmatrix}$ mit $|\alpha|^2 - |\beta|^2 = 1$

Sie erfüllen die Orthogonalitätsrelationen

$$(2\ell+1)\int_1^\infty dz\, d^{\ell}_{mn}(z)\, d^{\ell'}_{mn}(z) = i\,\delta(\rho-\rho')\begin{cases} \operatorname{tg}\pi\ell & \text{für } m,n \text{ ganzzahlig} \\ \operatorname{ctg}\pi\ell & \text{für } m,n \text{ halbzahlig} \end{cases}$$

$$\text{für } \ell = \tfrac{1}{2}+i\rho \qquad \ell' = \tfrac{1}{2}+i\rho' \qquad (2,3)$$

$$(2\ell+1)\int_1^\infty dz\, d^{\ell}_{mn}(z)\, d^{\ell'}_{mn}(z) = \delta_{\ell\ell'} \quad \text{für } \ell,\ell' = \pm\tfrac{1}{2}, \pm 1, \pm\tfrac{3}{2}, \cdots$$

Die Matrixelemente $d^{\ell}_{mn}(z)$ stimmen genau mit den von ANDREWS und GUNSON [6] untersuchten Funktionen $d_\ell^{mn}(z)$ überein. Wir führen hier kurz die für uns wichtigen Ergebnisse an. Die Funktionen lassen sich in der folgenden Weise zerlegen:

$$d^{\ell}_{mn}(z) = \frac{1}{\pi}\operatorname{tg}\pi(\ell-m)\left(e^{\ell}_{mn}(z) - e^{-\ell-1}_{mn}(z)\right) \qquad (2,4)$$

$$e^{\ell}_{mn}(z) = \frac{1}{2}\left[\Gamma(\ell+m+1)\Gamma(\ell-m+1)\Gamma(\ell-n+1)\Gamma(\ell+n+1)\right]^{1/2}\frac{1}{\Gamma(2\ell+2)}\cdot$$

$$\cdot\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{-\frac{m-n}{2}}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{-\ell-n} F\left(\ell+m+1,\ell+n+1,2\ell+2,\frac{2}{1-z}\right) \qquad (2,5)$$

Man vergleiche (2,4) mit der Zerlegung der Legendre Funktionen 1. Art nach solchen 2. Art.

a) Symmetrieeigenschaften

$$e^{\ell}_{mn}(z) = (-1)^{m-n}e^{\ell}_{nm}(z) = (-1)^{m-n}e^{\ell}_{-m,-n}(z) = e^{\ell}_{-n,-m}(z) \qquad (2,6)$$

b) Analytische Eigenschaften

In $d^{\ell}_{mn}(z)$ und $e^{\ell}_{mn}(z)$ haben die hypergeometrischen Funktionen, wie die Legendre Funktionen 1. und 2. Art Schnitte bei $-\infty < z < -1$ bzw. $-\infty < z < 1$ ; dazu kommen die Schnitte von $-\infty < z < -1$ und $1 < z < \infty$ der Faktoren $\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{m+n}{2}}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\frac{m-n}{2}}$ die wir im folgenden als kinematische Schnitte bezeichnen werden.

c) Asymptotisches Verhalten

$$|z| \to \infty: \quad e^{\ell}_{mn}(z) \sim \frac{1}{2}\left(\Gamma(\ell+m+1)\Gamma(\ell-m+1)\Gamma(\ell+n+1)\Gamma(\ell-n+1)\right)^{1/2} \cdot e^{\pm i\frac{\pi}{2}(m-n)}\left(\frac{z}{2}\right)^{-\ell-1}\frac{1}{\Gamma(2\ell+2)} \quad ; \pm \text{ für } \operatorname{Im} z \gtrless 0 \tag{2,8}$$

$$|\ell| \to \infty: \quad e^{\ell}_{mn}(z) \sim \left(\frac{\pi}{2}\right)^{1/2}\frac{1}{\Gamma\ell}\, e^{\pm i\frac{\pi}{2}(m-n)}\,(z^2-1)^{-\frac{1}{4}}\,[z-(z^2-1)]^{\ell+\frac{1}{2}} \tag{2,9}$$

für $\quad -\pi+\varepsilon < \arg\ell < \pi-\varepsilon \quad ; \quad \pm$ für $\operatorname{Im} z \gtrless 0$

d) Integralbeziehungen

$$\int_1^\infty dz\, d^{\ell}_{mn}(z)\, e^{\ell'}_{mn}(z) = (\ell-\ell')^{-1}(\ell+\ell'+1)^{-1}\,\frac{\Theta_{mn}(\ell)}{\Theta_{mn}(\ell')} \tag{2,10}$$

$$\Theta_{mn}(\ell) = \left(\frac{\Gamma(\ell+m+1)\,\Gamma(\ell-n+1)}{\Gamma(\ell+n+1)\,\Gamma(\ell-m+1)}\right)^{1/2}$$

$$\frac{1}{2i}\int_{M-\frac{1}{2}-i\infty}^{M-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\,\frac{d^{\ell}_{m,-n}(-t)\, e^{\ell}_{mn}(z)}{\sin\pi(\ell-m)} = \frac{1}{z-t}\left(\frac{1+t}{1+z}\right)^{\frac{|m+n|}{2}}\left(\frac{1-t}{1-z}\right)^{\frac{|m-n|}{2}} \tag{2,11}$$

$\arg(1-t) < \pi \qquad M = \min(|m|,|n|)$

Mit Hilfe der Orthogonalitätsrelationen (2, 3) und der Integralbeziehung (2, 10) läßt sic h aus (2, 11) eine Verallgemeinerung der Mehlerformel [7] gewinnen.

$$\pi P_{-\frac{1}{2}+i\rho}(-t) = \cosh\pi\rho \int_1^\infty dz\,\frac{1}{z-t}\,P_{-\frac{1}{2}+i\rho}(z)$$

Durch Verschiebung des Integrationsweges von $\ell = -\frac{1}{2}+i\rho+M$ nach $\ell = -\frac{1}{2}+i\rho$ und Anwendung von (2, 4) erhält man aus (2, 11):

$$\int_1^\infty \frac{dz}{z-t}\left(\frac{1+z}{2}\right)^{-\frac{|m+n|}{2}}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{-\frac{|m-n|}{2}} d^{\ell'}_{mn}(z) = \left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\frac{|m+n|}{2}}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{-\frac{|m-n|}{2}}\cdot$$

$$\left\{\frac{\pi}{2i}\int_{-\frac{1}{2}+i0}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\,\frac{d^{\ell}_{m,-n}(-t)}{\sin\pi(\ell-m)}\cot\pi(\ell-m)\int_1^\infty dz\, d^{\ell}_{mn}(z)\, d^{\ell'}_{mn}(z)\right.$$

$$\left. + \frac{1}{2i}\sum_{j=0,\frac{1}{2}}^{M-1}\oint_{\mathcal{L}_j}\frac{d\ell\,(2\ell+1)}{\sin\pi(\ell-m)}\, d^{\ell}_{m,-n}(-t)\int_1^\infty dz\, e^{\ell}_{mn}(z)\, d^{\ell'}_{mn}(z)\right. \tag{2,12}$$

$$= \frac{\pi}{2}\left(\frac{1+t}{2}\right)^{-\frac{|m+n|}{2}}\left(\frac{1-t}{2}\right)^{-\frac{|m-n|}{2}}\begin{cases}\frac{1}{\pi}\,\frac{d^{\ell}_{m,-n}(-t)}{\sin\pi(\ell-m)} & \text{für } \ell = -\frac{1}{2}+i\rho \\ d^{j}_{mn}(t) & \text{für } \ell = j = 0, \frac{1}{2}, \dots, M-1\end{cases}$$

$\mathcal{L}_j$ sollen kleine Kreise um die Punkte $\ell = j$ beschreiben. Zu einer weiteren Verallgemeinerung gelangt man durch partielle Integration.

$$\int_1^\infty \frac{dz}{z-t} \frac{d^{N+L}}{dz^{N+L}} \left(P_N(z)\, \tilde{d}^{\ell}_{mn}(z)\right) = \tag{2,13}$$

$$= -\frac{1}{1-t}\left(\frac{d^{N+L-1}}{dz^{N+L-1}}\left(P_N(z)\,\tilde{d}^{\ell}_{mn}(z)\right)\right)_{z=1} - \frac{d}{dt}\frac{1}{1-t}\left(\frac{d^{N+L-2}}{dz^{N+L-2}}\left(P_N(z)\tilde{d}^{\ell}_{mn}(z_5)\right)\right)_{z=1} - \cdots$$

$$+ \frac{\Pi}{2i}\frac{d^{N+L}}{dt^{N+L}}\left(P_N(t)\,\frac{\tilde{d}^{\ell}_{m,-n}(-t)}{\sin\pi(\ell-m)}\right)$$

Dabei ist $P_N(z)$ ein Polynom in $z$ von der Ordnung $N$ und

$$d^{\ell}_{mn}(z) = \Theta_{mn}(\ell)\left(\frac{1+z}{2}\right)^{\frac{|m+n|}{2}}\left(\frac{1-z}{2}\right)^{\frac{|m-n|}{2}}\tilde{d}^{\ell}_{mn}(z)$$

Auf der linken und auf der rechten Seite von (2,13) stehen Funktionen, die analytisch sind in dem Streifen

$$-L-1 < \mathrm{Re}\,\ell < L$$

Bei $\ell = M, M+1, \ldots$ entartet $\tilde{d}^{\ell}_{mn}(z)$ in ein Polynom der Ordnung $\ell$ das durch die (N+L) fache Differentiation zum verschwinden gebracht wird.

Aus (2,11) läßt sich schließlich eine Vollständigkeitsrelation (2,6) ableiten:

$$\frac{1}{2i}\int_{-\frac{1}{2}+i0}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\cot\pi\ell\; d^{\ell}_{mn}(z)\, d^{\ell}_{mn}(t) \tag{2,14}$$

$$+\frac{1}{2}\sum_{\ell=0,\frac{1}{2}}^{M-1}(2\ell+1)\, d^{\ell}_{mn}(z)\, d^{\ell}_{mn}(t) = \delta(z-t)$$

für alle $m, n$ halb- bzw. ganzzahlig

Bemerkenswert ist, daß nicht alle unitären Darstellungen zur Vollständigkeitsrelation beitragen; es fehlen die Darstellungen der "exceptional class" und die Darstellung $\ell = -\frac{1}{2}$ der "discrete class".

(2,14) gilt im Raum der quadratintegrablen Funktionen. Funktionen mit dem asymptotischen Verhalten

$$f_{mn}(z) \sim z^{L} \quad \text{für} \quad z \to \infty \quad , L > -\tfrac{1}{2}$$

lassen sich dagegen nach nicht unitären Darstellungen der dreidimensionalen Lorentzgruppe entwickeln. Für die gilt die Vollständigkeitsrelation:

$$\delta(z-t) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L-i\infty}^{L+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\, d^{\ell}_{mn}(t)\, e^{\ell}_{mn}(z) \qquad (2,15)$$

wobei wir der Einfachheit halber $L > M-1$ vorausgesetzt haben; für $L < M-1$ tragen auch die in dem Intervall $L < \ell < M-1$ liegenden Darstellungen der discrete class zur Vollständigkeitsrelation bei.

## 3. Kap. Die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe

Mit Hilfe der Methode der induzierten Darstellungen [10] insbesondere dem Kronecker Produkttheorem [10] haben R. STORA und P. MOUSSA[8] die Clebsch-Gordan-Koeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe für die Ausreduktion der Produktdarstellung

$$(\mu', \sigma', \tilde{\varepsilon}'=1) \times (M', s', \varepsilon'=1)$$

berechnet. Sie fanden bei Helizitätskopplung:[9]

$$\left(\begin{matrix} M'' s'' \varepsilon''=1 & \mu'' \sigma'' \tilde{\varepsilon}''=1 \\ p'' s_3'' & q'' \sigma_3'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \sqrt{n^2} & j\,\varepsilon=1 \\ n & m \end{matrix} \eta''(\lambda'', \nu'')\right) = \qquad (3,1)$$

$$N(p^2, n^2, j)\ \delta(n - p'' - q'')\ D^{j}_{\lambda''+\nu'', m}(R''(n))\cdot$$

$$\cdot\ D^{s''}_{s_3'' \lambda''}(R(p''))\ D^{\sigma''}_{\sigma_3'' \nu''}(R(q''))$$

Dabei ist (3, 2)

$$N(p^2, r^2, j) = \left(\frac{16p^2}{-r^2}\right)^{1/2} \nu(j)$$

$$\delta_{jj'}\,\nu^{-2}(j) = \int_0^{2\pi} d\varphi \int_0^{\pi} \sin\Theta\, d\Theta\; \mathfrak{D}^{j}_{\mu\mu}(\Theta,\varphi)\, \mathfrak{D}^{j}_{\mu\mu}(\Theta,\varphi)$$

$$= \frac{4\pi}{2j+1}\,\delta_{jj'}$$

eine Normierungsfunktion für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten (vgl. (3, 7))

$$P = p'' + q'' \qquad r = \frac{1}{2}\left(p'' - q'' - \frac{M''^2 - \mu''^2}{p^2} P\right) \qquad (3, 3)$$

Die Drehungen $R(r)$ , $R(p'')$ , $R(p')$ sind besonders einfach im Schwerpunktsystem zu berechnen:

$$p = \begin{pmatrix} \sqrt{p^2} \\ \vec{0} \end{pmatrix} \qquad p'' = \begin{pmatrix} p''_0 \\ \vec{p} \end{pmatrix} \qquad q'' = \begin{pmatrix} q''_0 \\ -\vec{p} \end{pmatrix} \qquad r = \begin{pmatrix} 0 \\ \vec{r} \end{pmatrix}$$

denn dann ist $R(p'') = R(q'') = R(r)$ die Drehung, die $(0,0,0,\sqrt{-r^2})$ in $r = (0, \vec{r})$ überführt. $\eta'' = (\lambda'', \nu'')$ enthält zwei Entartungsparameter $\lambda'', \nu''$ ; da bei der Ausreduktion der Produktdarstellung $(M''S''\varepsilon''=1) \otimes (\mu''\sigma''\tilde{\varepsilon}''=1)$ die irreduzible Darstellung $(\sqrt{P^2}, j, \varepsilon = 1)$ mehrfach auftritt, benötigt man zusätzliche Operatoren, deren Eigenwerte diese äquivalenten irreduziblen Darstellungen unterscheiden. Im Schwerpunktsystem sind dies in (3, 1) gerade die Helizitätsoperatoren der Produktzustände.

Die von STORA et al [8] gegebene Herleitung von (3, 1) läßt sich nun ohne weitere Schwierigkeiten auch für die Ausreduktion von Produkten der Art

$$(M'S'\varepsilon'=1) \otimes (M''S''\varepsilon''=-1)$$

durchführen, bei der auch Darstellungen zu negativen Massenquadraten auftreten: $(p'-p'')^2 < (M'-M'')^2$ , $\left(\varepsilon' = \frac{p'_0}{|M'|}\right.$ , $\left.\varepsilon'' = -\frac{p''_0}{|M''|} = -1\right)$

Es ist zweckmäßig, die Clebsch-Gordan-Koeffizienten wieder in einem speziellen System zu berechnen:

$$p' = (Q_0, Q_1, Q_2, p'_3) \qquad p'' = (Q_0, Q_1, Q_2, p''_3) \qquad P = p' - p'' = (0,0,0, p'_3 - p''_3) \qquad (3,4)$$

für $P^2 < 0$

$$Q = \frac{1}{2}\left(p' + p'' - \frac{M'^2 - M''^2}{P^2} P\right) = (Q_0, Q_1, Q_2, 0) \quad ; \quad (P, Q) = 0 \,, \; Q^2 > 0$$

$$\left( \begin{matrix} M' s' \varepsilon' = 1 & M'' s'' \varepsilon'' = -1 \\ p' s'_3 & -p'' s''_3 \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P^2 \, l \\ P \, m \end{matrix} \; \eta = (\lambda' \lambda'') \right) = N(P^2, Q^2, l) \; \delta(P - p' + p'') \cdot \qquad (3,5)$$

$$\cdot \mathcal{D}^{l}_{\lambda' + \lambda'', m} (L(Q)) \; \mathcal{D}^{s'}_{s'_3 \lambda'} (R(p')) \; \mathcal{D}^{s'''}_{s''_3 \lambda''} (R(-p''))$$

In der Normierungsfunktion

$$N(P^2, Q^2, l) = \left(\frac{-16 P^2}{Q^2}\right)^{1/4} \nu(l)$$

berechnet sich nun $\nu(l)$ aus den Orthogonalitätsrelationen (2, 3) der Darstellungen der dreidimensionalen Lorentzgruppe

$$|\nu(l)|^{-2} \, i \, \delta(P - P') = \int_1^\infty dz \, d^{l}_{mn}(z) \, d^{l}_{mn}(z') \qquad l = -\frac{1}{2} + i\rho$$

In (3, 5) ist L(Q) die dreidimensionale Lorentztransformation, die Q auf das Ruhesystem $(\sqrt{Q^2}, \vec{0})$ transformiert:

$$L(Q) = \left(2\sqrt{Q^2}\,(\sqrt{Q^2} + Q_0)\right)^{-\frac{1}{2}} \left(\sqrt{Q^2} + Q_0 - \vec{Q}\,\vec{\sigma}\right)$$

und $R(p')$ , $R(p'')$ sind die Drehungen

$$R(p') = L(p') \, L^{-1}(Q) \, L^{-1}(L(Q) p') \qquad (3,6)$$

$$R(p'') = L(p'') \, L^{-1}(Q) \, L^{-1}(L(Q) p'')$$

Als Entartungsparameter treten in (3, 5) wieder die Helizitäten der Produktzustände auf.

Aus den Orthogonalitätsrelationen der Darstellungsmatrizen der kleinen Gruppe, der Dreh- oder dreidimensionalen Lorentzgruppe, gewinnt man solche für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten [11]:

$$\sum_{s_3' s_3''} \int \frac{d^3 r'}{2|r_0'|} \frac{d^3 r''}{2|r_0''|} \left( \begin{matrix} M' s' \varepsilon' = 1 & M'' s'' \varepsilon'' = -1 \\ p' s_3' & r'' s_3'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} \bar{P}^2 \ell \\ p \mu \; \eta \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} \bar{P}^2 \ell \\ \bar{p} \bar{\mu} \; \bar{\eta} \end{matrix} \middle| \begin{matrix} M' s' \varepsilon' = 1 & M'' s'' \varepsilon'' = -1 \\ r' s_3' & -r'' s_3'' \end{matrix} \right)$$

$$= \delta(\bar{P} - \bar{\bar{P}}) \sum_{s_3' s_3''} \frac{1}{2} \int d^4 P \; \delta(P - r' + r'') \int d^4 Q \; \delta(Q^2 - \bar{Q}^2(\bar{P}^2, M'^2, M''^2)) \cdot$$

$$\cdot N(P^2, Q^2, \ell) \, \mathfrak{D}^{\ell}_{\lambda' + \lambda'', \mu}(L(Q)) \, \mathfrak{D}^{s'}_{s_3' \lambda'}(R(r')) \, \mathfrak{D}^{s''}_{s_3'' \lambda''}(R(r''))$$

$$\cdot N^*(P^2, Q^2, \ell) \, \mathfrak{D}^{\ell *}_{\tilde{\lambda}' + \tilde{\lambda}'', \bar{\mu}}(L(Q)) \, \mathfrak{D}^{s' *}_{s_3' \tilde{\lambda}'}(R(r')) \, \mathfrak{D}^{s'' *}_{s_3'' \tilde{\lambda}''}(R(r'')) \qquad (3,7)$$

$$= \delta(\bar{P} - \bar{\bar{P}}) \, \delta_{\eta \bar{\eta}} \, \delta(\ell, \bar{\ell}) \, \delta_{\mu \bar{\mu}}$$

mit $\delta(\ell, \bar{\ell}) = \begin{cases} i \, \delta(\varrho - \bar{\varrho}) & \text{für } \ell = -\frac{1}{2} + i\varrho, \; \bar{\ell} = -\frac{1}{2} + i\bar{\varrho} \\ \delta_{\ell \bar{\ell}} & \text{für } \ell, \bar{\ell} = 0, \pm\frac{1}{2}, \cdots \end{cases}$

und $\bar{Q}^2(\bar{P}^2, M'^2, M''^2) = \frac{1}{4}\left( \bar{P}^2 + M'^2 - M''^2 - 2 \frac{(M'^2 - M''^2)^2}{\bar{P}^2} \right)$

Ebenso findet man aus den Vollständigkeitsrelationen der kleinen Gruppen solche für die Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$\sum_{\ell \mu \eta} \int_{-\infty}^{(M'-M'')^2} dP^2 \int_{\Omega_{P^2}} (P) \left( \begin{matrix} M' s' \varepsilon' = 1 & M'' s'' \varepsilon'' = -1 \\ r' s_3' & -r'' s_3'' \end{matrix} \middle| \begin{matrix} P^2 \ell \\ P \mu \; \eta \end{matrix} \right) \left( \begin{matrix} P^2 \ell \\ P \mu \; \eta \end{matrix} \middle| \begin{matrix} M' s' \varepsilon' = 1 & M'' s'' \varepsilon'' = -1 \\ \vec{r}' s_3' & -\vec{r}'' s_3'' \end{matrix} \right)$$

$$= 2|r_0'| \, \delta^3(\vec{r}' - \vec{\bar{r}}') \; 2|r_0''| \, \delta^3(\vec{r}' - \vec{\bar{r}}'') \, \delta_{s_3' \bar{s}_3'} \, \delta_{s_3'' \bar{s}_3''} \qquad (3,8)$$

Da die Clebsch-Gordan-Koeffizienten nichts anderes als Skalarprodukte in der kanonischen Basis sind, ergibt sich aus ihrer Lorentzinvarianz:

$$\mathcal{D}^{s'}_{s_3 \bar{s}_3'}\left(R^{-1}(\Lambda,p')\right)\mathcal{D}^{s''}_{s_3''\bar{s}_3''}\left(R^{-1}(\Lambda,p'')\right)\left(\begin{matrix}m's'\varepsilon'=1 & m''s''\varepsilon''=-1 \\ \Lambda p' s_3' & -\Lambda p'' s_3''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}P^2 l \\ \Lambda P \bar{m}\end{matrix}\right)\mathcal{D}^{l}_{\bar{m}m}\left(L(\Lambda,P)\right)$$

$$= \left(\begin{matrix}m's' & m''s''\varepsilon''=-1 \\ p's_3' & -p''s_3''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}P^2 l \\ P m\end{matrix}\ \eta\right) \qquad (3,9)$$

Dabei ist $L(\Lambda,P)=R_{\Lambda P}\,\Lambda\,R_P^{-1}$ eine dreidimensionale Lorentztransformation und $R_P$ die ebene Lorentztransformation mit

$$R_P\,P = (0,0,0,\sqrt{-P^2})$$

Mit den Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen können wir das Wigner-Eckart-Theorem für die Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe aufstellen. Zunächst gilt formal die folgende Identität für das Matrixelement eines Operators $\mathcal{F}(P^2 l, P, m)$ mit dem Transformationsverhalten:

$$\mathcal{U}(\Lambda)\,\mathcal{F}(P^2,l,P,m)\,\mathcal{U}^{-1}(\Lambda) = \mathcal{F}(P^2 l, \Lambda P, \bar{m})\,\mathcal{D}^{l}_{\bar{m}m}\left(L(\Lambda,P)\right)$$

$$\langle p''s_3''\,|\,\mathcal{F}(P,m)\,|\,p's_3'\rangle = \int_{-\infty}^{(M'+M'')^2} d\tilde{P}^2 \int d\Omega_{\tilde{P}^2}(\tilde{P}) \sum_{\tilde{l}\tilde{m}\tilde{\eta}} C(P,\tilde{m},\tilde{\eta};Pm)\cdot$$

$$\cdot\,\mathcal{D}^{s'}_{s_3'\bar{s}_3'}(i\sigma_2)\left(\begin{matrix}M's'\varepsilon'=-1 & M''s''\varepsilon''=1 \\ -p's_3' & -p''s_3''\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\tilde{P}^2\tilde{l} \\ \tilde{P}\tilde{m}\end{matrix}\ \tilde{\eta}\right) \qquad (3,10)$$

mit

$$C(\tilde{P}\tilde{m}\tilde{\eta},Pm) = \int \frac{d^3\tilde{p}'}{2|\tilde{p}'_0|}\,\frac{d^3\tilde{p}''}{2|\tilde{p}''_0|} \sum_{\tilde{s}_3'\tilde{s}_3''}\left(\begin{matrix}\tilde{P}^2\tilde{l} \\ \tilde{P}\tilde{m}\end{matrix}\tilde{\eta}\middle|\begin{matrix}M's'\varepsilon'=-1 & M''s''\varepsilon''=1 \\ -\tilde{p}'\tilde{s}_3' & \tilde{p}''\tilde{s}_3''\end{matrix}\right)\cdot$$

$$\cdot\,\langle\tilde{p}''\tilde{s}_3''\,|\,\mathcal{F}(P,m)\,|\,\tilde{p}'\tilde{s}_3'\rangle\,\mathcal{D}^{s'}_{\tilde{s}_3'\bar{s}_3'}(i\sigma_2) \qquad (3,11)$$

Aus dem Transformationsverhalten des Matrixelementes und der Invarianz des Clebsch-Gordan-Koeffizienten (3, 9) folgt die Invarianz

der Größen $C(\tilde{p}\,\tilde{m}\,\tilde{\eta}, p m)$

$$C(\tilde{p}\,\tilde{m}\,\tilde{\eta}, p m) - C(\Lambda\tilde{p}\,\tilde{m}\,\tilde{\eta}, \Lambda p\, m)\; \mathcal{D}^{\tilde{\ell}*}_{\tilde{m}\tilde{m}}(L(\Lambda,\tilde{p})) \cdot \mathcal{D}^{\ell}_{m m}(L(\Lambda,p)) \tag{3,12}$$

falls $p^2, \tilde{p}^2 < 0$ . Für $p^2 > 0$ muß man die $\mathcal{D}^{\ell}_{mm}(L(\Lambda,p))$ durch die Drehmatrizen $\mathcal{D}^{\ell}_{mm}(R(\Lambda,p))$ ersetzen. $C(\tilde{p}\tilde{m}\tilde{\eta}, pm)$ kann also als das Matrixelement $\langle \tilde{p}\tilde{m}\tilde{\eta}|C|pm\rangle$ eines invarianten Operators $C$ $U(\Lambda) C U^{+}(\Lambda) = C$ aufgefaßt werden. Die Anwendung des Schureschen Lemma's liefert dann:

$$C(\tilde{p}\tilde{m}\tilde{\eta}, pm) = \delta^4(p-\tilde{p})\,\delta_{\ell\tilde{\ell}}\,\delta_{m\tilde{m}}\,C(p^2,\ell,\tilde{\eta}) \tag{3,13}$$

Dies in (3,10) eingesetzt, verschafft uns unmittelbar das Wigner-Eckart-Theorem für die Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe

$$\langle p'' s''_3 | T(p,m) | p' s'_3\rangle = \tag{3,14}$$

$$= \sum_{\tilde{\eta}} C(p^2,\ell,\tilde{\eta}) \begin{pmatrix} M' s' \varepsilon'=-1 & M'' s'' \varepsilon''=1 \\ -p' \bar{s}'_3 & p'' s''_3 \end{pmatrix} \begin{matrix} p^2 \ell \\ pm\;\tilde{\eta} \end{matrix} \mathcal{D}^{s'}_{\bar{s}'_3 s'_3}(R'\sigma_2)$$

## 4. Kap. Vollständige Spinorbasen und kinematische Singularitäten

In diesem Kapitel behandeln wir die Zerlegung von T-Matrixelementen nach invarianten Funktionen $b(i, s, t)$

$$\{p''A'', q''B'' | T | p'A', q'B'\} = \sum_i b(i, s, t)\, Y(i, p''A'', q''B'', p'A', q'B') \quad *) \qquad (4,1)$$

Hierbei sollen die $Y(i, p''A'', q''B'', p'A', q'B')$ ein vollständiges System von Kovarianten bilden; die $b(i, s, t)$ hängen nur von den Invarianten $s=(p'+q')^2$ $t=(p'-p'')^2$, $p'^2$, $q'^2$, $p''^2$, $q''^2$ ab, die ich aus den Impulsvektoren $p'$, $q'$, $p''q''$ unter Beachtung der Energie-Impulserhaltung bilden kann.

Die Bedeutung der Zerlegung (4,1) besteht darin, daß man die Kinematik durch die explizit bekannten Kovarianten zu beschreiben versucht, die Dynamik dagegen durch die analytischen Eigenschaften der invarianten Funktionen $b(i, s, t)$. Damit nun die invarianten Funktionen nur die "dynamischen", keine künstlich durch die Kovarianten eingeführten "kinematischen" Singularitäten enthält, müssen wir definieren, wann die invarianten Funktionen frei von kinematischen Singularitäten heißen sollen.

Def.: Angenommen, die T-Matrixelemente $\{p''A'' q''B' | T | p'A' q'B'\}$ seien unter Beachtung der Energie-Impulserhaltung analytisch in den Komponenten der Impulsvektoren. Die invarianten Funktionen $b(i, s, t)$ heißen frei von kinematischen Singularitäten, wenn sie unter dieser Voraussetzung analytisch sind in den Invarianten $s, t, p'^2, q'^2, p''^2, q''^2$
Denken wir uns z.B. die Kovarianten $Y(i, p''A'', q''B'', p'A', q'B')$ als Polynome in den Impulsen $p'$, $q'$, $p''$, $q''$ aufgebaut, so können die invarianten Funktionen $b(i, s, t)$ höchstens noch kinematische Pole

---

*) Die Zustände der ein- und auslaufenden Teilchen mögen in der Spinorbasis vorliegen, die aus der kanonischen Basis durch die Transformation $|q'B'\rangle = |q'\sigma'_3\rangle D^{\sigma'}_{\sigma'_3 B'}(L^{-1}(q'))$ [1] hervorgeht. Die Beschreibung der Felder im Konfigurationsraum legt diese Basis nahe [15] [17] (vgl. 5. Kap.)

an den Stellen haben, wo die Kovarianten linear abhängig werden. Abgesehen von diesen kinematischen Polen haben also die invarianten Funktionen nur "dynamische Singularitäten", wie sie etwa durch die Mandelstamdarstellung beschrieben werden.

a) Die explizite Konstruktion des vollständigen Systems von Kovarianten läßt sich am einfachsten in der Spinorbasis durchführen:

$$T(p''A'', q'B'', p'A', q'B') = D^{S''}_{A''S''_3}(L^{-1}(p'')) \, D^{\sigma''}_{B''\sigma''_3}(L^{-1}(q'')) \cdot$$
$$\langle p''S''_3, q''\sigma''_3 | T | p'S'_3, q'\sigma'_3 \rangle \cdot D^{S'}_{S'_3 A'}(L(p')\,z\,\sigma_2) \, D^{\sigma'}_{\sigma'_3 B'}(L(q')\,\sigma_2) \qquad (4,2)$$

In dieser Basis haben die Amplituden das Transformationsverhalten:

$$T(\Lambda p'' A'', \Lambda q'' B'', \Lambda p' A', \Lambda q' B') = D^{S''}_{A''\bar{A}''}(\Lambda) \, D^{\sigma''}_{B''\bar{B}''}(\Lambda) \cdot$$
$$\cdot D^{S'}_{A'\bar{A}'}(\Lambda) \, D^{\sigma'}_{B'\bar{B}'}(\Lambda) \, T(p''\bar{A}'', q''\bar{B}'', p'\bar{A}', q'\bar{B}')$$

des direkten Produktes von vier ungepunkteten Spinoren. Reduzieren wir dies aus:

$$T(p''A'', q''B'', p'A', q'B') = (A'A'' B'B'' | \alpha) \, T^{\mathcal{J}}_{\underline{\alpha}}(p''q'' p'q', (s,\sigma)) \qquad (4,3)$$

- wobei wir zur Abkürzung

$$(A'A'' B'B'' | \alpha) = (SA', S''A'' | SA)(\sigma'B', \sigma''B'' | \sigma B)(SA\,\sigma B | \mathcal{J}\alpha)$$

setzen und in (4,2) über $S$, $\sigma$ und $\mathcal{J}$ zu summieren haben - so transformieren sich die Amplituden $T^{\mathcal{J}}_{\underline{\alpha}}(p''q'' p'q')$ wie: irreduzible Spinoren der Art $(\mathcal{J}, 0)$ :

$$T^{\mathcal{J}}_{\alpha}(\Lambda p'', \Lambda q'', \Lambda p', \Lambda q') = D^{\mathcal{J}}_{\alpha\underline{\alpha}}(\Lambda) \, T^{\mathcal{J}}_{\underline{\alpha}}(p''q'' p'q') \qquad (4,4)$$

Diese kann man zerlegen nach einer Basis von $\mathcal{J}+1$ Spinoren [12,13,14]:

$$Y_\alpha^{(+)}(j\,\mathcal{J}, k_1, k_2, k_3) \qquad j = 0, 1, \dots, \mathcal{J} \tag{4,5}$$

und $\mathcal{J}$ Pseudospinoren:

$$Y_\alpha^{(-)}(j\,\mathcal{J}, k_1, k_2, k_3)$$

Die Vierervektoren $k_1$ , $k_2$ , $k_3$ sollen drei linear unabhängige Impulse sein, die den Streuprozeß beschreiben. Zur Konstruktion dieser Spinoren benutze man die Tatsache, daß sich Vierervektoren und Tensoren kovariant Spinoren zuordnen lassen [1]; z.B. dem Vektor $k_1$ der jeweils einmal gepunktete und ungepunktete Spinor $(k_1\sigma)_{A\dot B}$

$$k_1 \longrightarrow (k_1\sigma)_{A\dot B} = (k_{10} + \vec{k}_1\vec{\sigma})_{A\dot B} \tag{4,6}$$

dem Tensor $k_{1\mu}, k_{2\nu}$ das direkte Produkt zweier Spinoren der Art (4,5):

$$k_{1\mu}\, k_{2\nu} \longrightarrow (k_1\sigma)_{A\dot B}\ (k_2\sigma)_{C\dot D} =$$

$$= \sum_{j,i=0}^{1} \left(\tfrac{1}{2}A, \tfrac{1}{2}C \,|\, jE\right)\left(\tfrac{1}{2}\dot B, \tfrac{1}{2}\dot D \,|\, i\dot F\right)(k_1 \times k_2)^{(i,j)}_{E\dot F}$$

Unter der Vertauschung von $k_1$ und $k_2$ sind

$(k_1 \times k_2)^{(0,0)}_{0\,0}$ und $(k_1 \times k_2)^{(1,1)}_{E\dot F}$ symmetrisch

$(k_1 \times k_2)^{(0,1)}_{0,\dot F}$ und $(k_1 \times k_2)^{(1,0)}_{E\,0} = (k_1 \times k_2)^{1}_{E}$ anti-

symmetrisch. ZuSpinoren höherer Dimension gelangt man wieder durch Produktbildung:

z.B. $(k_1 \times k_2)^{i}_{C} = (i\,C \,|\, i-1\,C', 1C'')\ (k_1 \times k_2)^{i-1}_{C'}\ (k_1 \times k_2)^{1}_{C''}$

Sie haben das Symmetrieverhalten:

$$(k_1 \times k_2)^{i}_{C} = (-1)^i\ (k_2 \times k_1)^{i}_{C}$$

Um nun aus den drei linear unabhängigen Vektoren $k_1$ , $k_2$ , $k_3$ eine Basis von Spinoren der Art (4,5) mit dem Transformationsverhalten $\mathcal{D}^{(\mathcal{J},0)}$ unter homogenen Lorentztransformationen aufzubauen

ist es offensichtlich zweckmäßig, nicht von Zuordnungen der Art (4, 6) für die Impulse $k_1$ , $k_2$ , $k_3$ auszugehen, sondern von den Spinoren

$$(k_1 \times k_3)^{1}_{c'} \,, \quad (k_2 \times k_3)^{1}_{c''} \,, \quad (w \times k_3)^{1}_{c'''} \qquad w_\mu = \varepsilon_\mu{}^{\nu\rho\sigma} k_{1\nu} k_{2\rho} k_{3\sigma}$$

Eine mögliche Wahl für die Spinoren (4, 5) ist dann [1,12]

$$Y^{(+)}_{\alpha}(j\mathfrak{J}, k_1 k_2 k_3) = (k_1 \times k_3)^{j}_{\beta} \, (k_2 \times k_3)^{\mathfrak{J}-j}_{\gamma} \, (\mathfrak{J}\alpha \,|\, j\beta, \mathfrak{J}-j\gamma) \qquad (4,7)$$

$$Y^{(-)}_{\alpha}(j\mathfrak{J}, k_1, k_2 k_3) = (k_1 \times k_3)^{j}_{\beta} \, (k_2 \times k_3)^{\mathfrak{J}-j-1}_{\gamma} \, (\mathfrak{J}-1\,\delta \,|\, j\beta, \mathfrak{J}-j-1\,\gamma) \cdot$$
$$\cdot (w \times k_3)^{1}_{\varepsilon} \, (\mathfrak{J}\alpha \,|\, \mathfrak{J}-1\,\delta, 1\varepsilon)$$

Da genau $2\mathfrak{J}+1$ linear unabhängige Spinoren der Art $(\mathfrak{J}, 0)$ existieren, liefern die durch (4,7) definierten Spinoren immer dann eine vollständige Basis, wenn $\det(k_1, k_2, k_3, w) \neq 0$ ist, denn dann ist auch

$$\det\left((k_1 \times k_3)^{1}_{c'} \,, (k_2 \times k_3)^{1}_{c''} \,, (w \times k_3)^{1}_{c'''}\right) \neq 0$$

b) <u>Die Spinorbasis I</u>

Wir wollen die Spinoren $Y^{(\pm)}_{\alpha}$ für zwei Sätze von Impulsen $k_1$ , $k_2$ , $k_3$ näher untersuchen. Die erste Wahl

$$k_1 = q = \tfrac{1}{2}\left(q' + q'' - \frac{\mu''^2 - \mu'^2}{p^2} p\right) \qquad q'^2 = \mu'^2 \qquad q''^2 = \mu''^2$$

$$k_2 = Q = \tfrac{1}{2}\left(p' + p'' - \frac{M''^2 - M'^2}{p^2} p\right) \qquad p'^2 = M'^2 \qquad p''^2 = M''^2 \qquad (4,8)$$

$$k_3 = p = p' - p'' = q'' - q'$$

soll uns die "Spinorbasis I" liefern, die in dem speziellen System I" :

$$q' = (q_0, q_1, 0, q_3') \;,\; q'' = (q_0, q_1, 0, q_3'') \;,\; r' = (Q_0, 0, 0, r_3') \;,\; r'' = (Q_0, 0, 0, r_3'')$$

$$q = (q_0, q_1, 0\,0) \;,\; Q = (Q_0, \vec{0}) \;,\; P = (0, 0, 0, P_3) \quad w = P_3 Q_0 q_1 (0, 0, 1, 0) \tag{4,9}$$

eine besonders einfache Form annimmt:

$$Y_\alpha^{(\pm)}(i, \jmath, PQq) = P_3^{\jmath} \sqrt{q^2}^{\,i} \, Q_0^{\jmath - i} \, (i\alpha, \jmath - i, 0 | \jmath \alpha) \, \mathfrak{D}^i_{\alpha,0}(L(q))$$

$$Y_\alpha^{(-)}(i, \jmath, PQq) = P_3^{\jmath+1} \sqrt{q^2}^{\,i} \, Q_0^{\jmath - i} \, q_1 \, \frac{1}{\sqrt{2}} \left( \frac{(2(\jmath-1))!\,(\jmath+\alpha)!\,(\jmath-\alpha)!}{(2\jmath)!\,(\jmath-1+\alpha)!\,(\jmath-1-\alpha)!} \right)^{1/2} \cdot \tag{4,10}$$

$$\cdot \Big\{ (i\alpha+1, \jmath-i-1, 0 | \jmath-1, \alpha+1) \left( \frac{\jmath-1-\alpha}{\jmath+\alpha} \right)^{1/2} \mathfrak{D}^i_{\alpha+1,0}(L(q)) \Big|$$

$$- (i\alpha-1, \jmath-i-1, 0 | \jmath-1, \alpha-1) \left( \frac{\jmath-1+\alpha}{\jmath-\alpha} \right)^{1/2} \mathfrak{D}^i_{\alpha-1,0}(L(q)) \Big| \Big\}$$

mit dem Paritätsverhalten

$$Y_\alpha^{(\pm)}(i, \jmath, \pi P \; \pi Q \; \tau q) = \pm (-1)^{\jmath + \alpha} \, Y_\alpha^{(\pm)}(i \jmath, PQq) \tag{4,11}$$

und den Symmetrieeigenschaften:

$$Y_\alpha^{(\pm)}(i, \jmath, PQq) = \pm \, Y_{-\alpha}^{(\pm)}(i \jmath, PQq) \tag{4,12}$$

Die zu den Spinoren $Y_\alpha^{(\pm)}(i \jmath, PQq)$

orthogonalen Spinoren $X^{(\pm)}(i \jmath, PQq)^\alpha$

$$\sum_{\alpha=-\jmath}^{\jmath} Y_\alpha^{(\pm)}(i \jmath, PQq) \, X^{(\pm)}(j \jmath, PQq)^\alpha = \delta_{ij}$$

$$\sum_{\alpha=-\jmath}^{\jmath} Y_\alpha^{(\pm)}(i \jmath, PQq) \, X^{(\mp)}(j \jmath, PQq)^\alpha = 0 \tag{4,13}$$

mit den Symmetrieeigenschaften

$$X^{(\pm)}(j \jmath, PQq)^\alpha = \pm \, X^{(\pm)}(j \jmath, PQq)^\alpha \tag{4,14}$$

lassen sich aus (4,12), (4,13) und (4,14) bestimmen:
Denn aus $Y_\alpha^{(+)}(j\,\mathfrak{z}, PQq) = 0$ für $\alpha > j$ folgt für $\alpha = 0$ :

$$X^{(+)}(j\,\mathfrak{z}, PQq)^0 = \frac{1}{2}\begin{cases} 0 & j > 0 \\ \left(Y_0(0,\mathfrak{z},PQq)\right)^{-1} & j = 0 \end{cases} \qquad (4,15)$$

Setzen wir zur Abkürzung $Y_\alpha^{(+)}(i\,\mathfrak{z}, PQq) = Y_\alpha^i \; X^{(+)}(j\,\mathfrak{z}, PQq)^\alpha = X_j^\alpha$
so finden wir bei sukzessiver Anwendung von Gleichung (4,13) auf (4,15) aufbauend:

$$X^{(+)}(j\,\mathfrak{z}, PQq)^\alpha = \begin{cases} 0 & \alpha < j \\ \frac{1}{2}\left(Y_j^j\right)^{-1} & \alpha = j \\ -\left(Y_{j+1}^{j+1}\right)^{-1} Y_j^{j+1} X_j^j & \alpha = j+1 \\ -\left(Y_{j+2}^{j+2}\right)^{-1}\left\{Y_j^{j+2} X_j^j + Y_{j+1}^{j+2} X_j^{j+1}\right\} & \alpha = j+2 \\ \quad - - - - - - - - - - - - & \\ -\left(Y_{\mathfrak{z}}^{\mathfrak{z}}\right)^{-1}\left\{Y_j^{\mathfrak{z}} X_j^j + Y_{j+1}^{\mathfrak{z}} X_j^{j+1} + \cdots + Y_{\mathfrak{z}-1}^{\mathfrak{z}} X_j^{\mathfrak{z}-1}\right\} & \alpha = \mathfrak{z} \end{cases} \qquad (4,16)$$

In unserem speziellen System I gilt mit (4,10)

und $\mathfrak{D}_{\alpha,0}^i(L(q)) = \frac{(i-\alpha)!}{(i+\alpha)!} \; P_i^\alpha(z_s) \qquad z_s = \frac{q_0}{\sqrt{q^2}}$

wobei $P_i^\alpha(z_s)$ das zugeordnete Legendre Polynom i-ter Ordnung ist:

$$Y_j^{(+)}(j+\kappa, \mathfrak{z}, PQq)\left(Y_j^{(+)}(j\,\mathfrak{z}, PQq)\right)^{-1} = P(k, j, z_s) \qquad (4,17)$$

$P(k, j, z_s)$ soll hier ein Polynom in $z_s$ der Ordnung $k$ bezeichnen. Die Rekursionsformel (4,16) zeigt dann mit (4,17) für $\alpha \geq 0$ :

$$X^{(+)}(j, \mathfrak{z}, PQq)^\alpha = \left(\frac{z_s+1}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}}\left(\frac{z_s-1}{2}\right)^{-\frac{\alpha}{2}} P(\alpha-j, z_s) \qquad (4,18)$$

$P(\alpha-j, z_s)$ ist jetzt ein Polynom in $z_s$ vom Grade $\alpha - j$ .
Mit denselben Methoden gewinnt man die Formel (4,18) auch für die Spinoren $X^{(-)}(j\,\mathfrak{z}, PQq)^\alpha$

c) Die Spinorbasis II

Wie wir in den folgenden Kapiteln sehen werden, eignet sich die Spinorbasis I besonders gut, die kinemaitschen Singularitäten der Streuamplitude in der s-Ebene zu beschreiben. Die nun zu definierende "Spinorbasis II" soll dasselbe in der t-Ebene leisten:

$$\begin{aligned} k_1 &= r = \tfrac{1}{2}\left(p'' - q'' - \frac{M''^2 - \mu''^2}{p^2}\, P\right) \\ k_2 &= R = \tfrac{1}{2}\left(p' - q' - \frac{M'^2 - \mu'^2}{p^2}\, P\right) \\ k_3 &= P = p' + q' = p'' + q'' \end{aligned} \tag{4,19}$$

Für die Spinoren (4, 7) gilt in dem speziellen System II:

$$\begin{gathered} p' = (p'_0, 0, 0, R_3)\,;\; q' = (q'_0, 0, 0, -R_3)\;;\; p'' = (p''_0, r_1, 0, r_3)\;;\; q'' = (q''_0, -r_1, 0, -r_3) \\ r = (0, r_1, 0, r_3) \qquad R = (0, 0, 0, R_3) \qquad P = (P_0, \vec{0}) \end{gathered} \tag{4,20}$$

$$Y_\alpha^{(\pm)}(j, \mathcal{J}, P R r) = P_0^{\mathcal{J}} \sqrt{-r^2}^{\,j}\, R_3^{\mathcal{J}-j}\, (j\alpha, \mathcal{J}-1\; 0 \,|\, \mathcal{J}\alpha)\; D^j_{\alpha,\cdot}(R(\vec{r}))\Big| \tag{4,21}$$

mit $\quad D^j_{\alpha,0}(R(\vec{r})) = \dfrac{(j-\alpha)!}{(j+\alpha)!}\, P_j^{\alpha}(z_t) \qquad z_t = \dfrac{r_3}{\sqrt{-r^2}}$

Sie haben die Paritäts- und Symmetrieeigenschaften:

$$\begin{aligned} Y_\alpha^{(\pm)}(j\,\mathcal{J}, \pi P, \pi R, \pi r) &= \pm (-1)^{\mathcal{J}}\; Y_\alpha^{(\pm)}(j\,\mathcal{J}, P R r)\Big| \\ Y_\alpha^{(\pm)}(j\,\mathcal{J}, P, R, r) &= \pm (-1)^{\alpha}\; Y_{-\alpha}^{(\pm)}(j\,\mathcal{J}, P R r) \end{aligned} \tag{4,22}$$

Für die zu (4, 21) orthogonalen Spinoren gilt eine zu (4, 18) analoge Formel:

$$X^{(\pm)}(j\mathcal{J}, r R_r)^{\alpha} = \left(\frac{1+z_t}{2}\right)^{-\frac{|\alpha|}{2}} \left(\frac{1-z_t}{2}\right)^{-\frac{|\alpha|}{2}} P(|\alpha|-j, z_t) \qquad (4,23)$$

d) Kinematische Pole

Wir haben jetzt zwei kovariante Zerlegungen der irreduziblen Spinoramplituden (4, 4):

$$T^{\mathcal{J}}_{\alpha} = \sum_{i=0}^{\mathcal{J}} b^{(+)}(i\mathcal{J}, st)\, Y^{(+)}_{\alpha}(i\mathcal{J}, PQq) + \sum_{i=0}^{\mathcal{J}-1} b^{(-)}(i\mathcal{J}, st)\, Y^{(-)}_{\alpha}(i\mathcal{J}, PQq)$$

$$T^{\mathcal{J}}_{\alpha} = \sum_{j=0}^{\mathcal{J}} B^{(+)}(j\mathcal{J}, st)\, Y^{(+)}_{\alpha}(j\mathcal{J}, r R_r) + \sum_{j=0}^{\mathcal{J}-1} B^{(-)}(j\mathcal{J}, st)\, Y^{(-)}_{\alpha}(j\mathcal{J}, r R_r) \qquad (4,24)$$

Die invarianten Funktionen $b^{(\pm)}(i\mathcal{J}, s, t)$ haben kinematische Polstellen höchstens bei

$$d = \det(PQ, q\, w) = -P^2 Q^2 q^2 (z_s^2 - 1) = 0 \qquad (4,25)$$

mit $P^2 = (r' - r'')^2 = t$

$$Q^2 = \frac{1}{4}\left(2(M'^2 + M''^2) - t - \frac{1}{t}(M'^2 - M''^2)^2\right) \qquad (4,26)$$

$$q^2 = \frac{1}{4}\left(2(\mu'^2 + \mu''^2) - t - \frac{1}{t}(\mu'^2 - \mu''^2)^2\right) \qquad (4,27)$$

$$z_s = \frac{1}{4\sqrt{Q^2}\sqrt{q^2}}\left(2s + t - (M'^2 + M''^2 + \mu'^2 + \mu''^2) - \frac{1}{t}(M'^2 - M''^2)(\mu'^2 - \mu''^2)\right) \qquad (4,28)$$

und falls $M' \neq M''$ oder $\mu' \neq \mu''$ bei $t = 0$ (vgl. (4, 8))
Die Funktionen $B^{(\pm)}(j\mathcal{J}, st)$ bei

$$d = \det(r R_r w) = r^2 R^2 r^2 (1 - z_t^2) = 0, \quad w_\mu = \varepsilon_\mu{}^{\nu\rho\sigma} r_\nu R_\rho r_\sigma \qquad (4,29)$$

mit $r^2 = (r' + q')^2 = s$

$$R^2 = \frac{1}{4}\left(2(M'^2+\mu'^2) - s - \frac{1}{s}(M'^2-\mu'^2)^2\right) \tag{4,30}$$

$$r^2 = \frac{1}{4}\left(2(M''^2+\mu''^2) - s - \frac{1}{s}(M''^2-\mu''^2)^2\right) \tag{4,31}$$

$$z_t = \frac{1}{4\sqrt{r^2}\sqrt{R^2}}\left(2t + s - (M'^2+M''^2+\mu'^2+\mu''^2) - \frac{1}{s}(M'^2-\mu'^2)(M''^2-\mu''^2)\right) \tag{4,32}$$

und falls $M' \neq \mu'$ oder $M'' \neq \mu''$ bei $s = 0$ (vgl. (4,19))

Diese möglichen kinematischen Polstellen sollen in den Kap. 6 und 7 an Hand von zwei Entwicklungen der T-Matrixelemente nach unitären Darstellungen der inhomogenen Lorentzgruppe diskutiert werden. Zur Aufstellung der ersten Entwicklung benötigen wir zu festem $t < 0$ einfache Dispersionsrelationen in $s$ für die invarianten Amplituden $b^{(i)}(i, s, t)$, die im nächsten Kap. hergeleitet werden.

## 5. Kap. Einfache Dispersionsrelationen für die invarianten Amplituden $b^{(\pm)}(\nu, s\,t)$

### a) Reduktionsformalismus.[16]

Die in unserem Streuprozeß auftretenden ein- und auslaufenden Teilchen mit den Spins $s'$, $\sigma'$ bzw. $s''$, $\sigma''$ und den Massen $M', \mu'$ bzw. $M'' \mu''$ lassen sich durch Felder $\varphi^{+}_{\dot{A}'}(x, in)$ $\varphi^{+}_{\dot{B}'}(x, in)$ bzw $\varphi_{A''}(x, out)$ $\varphi_{B''}(x, out)$ beschreiben[17], die sich unter homogenen Lorentztransformationen wie gepunkte bzw. ungepunkte Spinoren transformieren:

$$U(\Lambda)\,\varphi^{+}_{\dot{B}'}(x, in)\,U^{-1}(\Lambda) = \mathcal{D}^{s'}_{\dot{B}'\dot{\bar{B}}'}(\Lambda^{-1})^{*}\,\varphi^{+}_{\dot{\bar{B}}'}(\Lambda x, in)$$
$$U(\Lambda)\,\varphi_{B''}(x, out)\,U^{-1}(\Lambda) = \mathcal{D}^{s''}_{B''\bar{B}''}(\Lambda^{-1})\,\varphi_{\bar{B}''}(\Lambda x, out) \qquad (5,1)$$

und die Klein-Gordon-Gleichung

$$(\Box_x + \mu'^2)\,\varphi^{+}_{\dot{B}'}(x, in) = 0 \qquad (\Box_x + \mu''^2)\,\varphi^{+}_{\dot{B}''}(x, out) = 0$$

erfüllen. Wir können diese Felder nach einem vollständigen System von Lösungen der Klein-Gordon-Gleichung -etwa nach ebenen Wellen- entwickeln. Die Entwicklungskoeffizienten

$$a^{+}(q'\dot{B}', in) = \int d^4x\, e^{-iq'x} \overleftrightarrow{\partial_{x_0}}\, \varphi_{\dot{B}'}(x)$$
$$a(q''B'', out) = \int d^4x\, e^{iq''x} \overleftrightarrow{\partial_{x_0}}\, \varphi_{B''}(x)$$

sind dann Erzeugungs- und Vernichtungsoperatoren von Zuständen in der Spinorbasis

$$a^{+}(q'\dot{B}')\,|0\rangle = |q'\dot{B}'\, in\rangle$$
$$\langle 0|\, a(q''B'', out) = \langle q''B''\, out|$$

Die Einführung von interpolierenden Feldern $\varphi^{+}_{\dot{B}'}(x)$, $\varphi_{B''}(x)$, die schwach gegen die ein- und auslaufenden Felder konvergieren sollen[17]:

$$\lim_{x_0 \to \mp\infty} \langle \phi | \varphi^{+}_{\dot{\beta}'}(x) | \psi \rangle = \langle \phi | \varphi^{+}_{\dot{\beta}'}(x, \overset{in}{out}) | \psi \rangle$$

$$\lim_{x_0 \to \pm\infty} \langle \phi | \varphi_{\beta''}(x) | \psi \rangle = \langle \phi | \varphi_{\beta''}(x, \overset{out}{in}) | \psi \rangle \qquad (5,2)$$

erlaubt es schließlich, den Reduktionsformalismus wie im spinlosen Fall [16] durchzuführen.

$$\{ p'' A'' \; q'' B'' \, out | p' \dot{A}' \; q' \dot{B}' \, in \} - \{ p'' A'' \; q'' B'' \, in | p' \dot{A}' \; q' \dot{B}' \, in \} \qquad (5,3)$$

$$= \{ p'' A'' \; q'' B'' \, in | \; S - 1 \; | p' A' \; q' B' \, in \} - \frac{1}{(2\pi)^3} \int d^4x \, d^4y \, e^{-iq'x + iq''y}$$

$$(\Box_x + \mu'^2)(\Box_y + \mu''^2) \, \Theta(y_0 - x_0) \{ p'' A'' | [\varphi_{B''}(y), \varphi^{+}_{\dot{B}'}(x)] | p' \dot{A}' \}$$

$$= 2\pi i \; \delta(p'' + q'' - p' - q') \{ p'' A'' \; q'' B'' | T | p' \dot{A}', \; q' \dot{B}' \}$$

Mit $$R' \varphi_{B''}(y) \varphi_{\dot{B}'}(x) = -i(\Box_y + \mu''^2)(\Box_x + \mu'^2) \, \Theta(y_0 - x_0) [\varphi_{B''}(y), \varphi^{+}_{\dot{B}'}(x)] \qquad (5,4)$$

erhalten wir für das T-Matrixelement:

$$\{ p'' A'' \; q'' B'' | T | p' \dot{A}' \; q' \dot{B}' \} = - \int d^4x \, e^{i \frac{q' + q''}{2} x} \{ p'' A'' | R' \varphi_{B''}\left(\tfrac{x}{2}\right) \varphi_{\dot{B}'}\left(-\tfrac{x}{2}\right) | p' \dot{A}' \} \qquad (5,5)$$

In unserem speziellen System I (4, 9), (4, 26)-(4, 28) steckt die gesamte $s = (p' + q')^2$ Abhängigkeit in dem Faktor

$$e^{i \frac{q' + q''}{2} x} = e^{i \sqrt{q^2} \left( z_s x_0 - \sqrt{z_s^2 - 1} \, x_1 \right) - \frac{\mu'^2 - \mu''^2}{1 - t} x_3} \qquad (5,6)$$

$$z_s = \frac{q_0}{\sqrt{q^2}} = \frac{2s + t - (M'^2 + M''^2 + \mu'^2 + \mu''^2) + \frac{1}{t}(M'^2 - M''^2)(\mu''^2 - \mu'^2)}{\left(2(M'^2 + M''^2) - t - \frac{1}{t}(M'^2 - M''^2)^2\right)^{1/2} \left(2(\mu'^2 + \mu''^2) - t - \frac{1}{t}(\mu'^2 - \mu''^2)^2\right)^{1/2}} \qquad (5,7)$$

$$q^2 = \frac{1}{4} \left( 2(\mu'^2 + \mu''^2) - t - \frac{1}{t}(\mu'^2 - \mu''^2)^2 \right) \qquad (5,8)$$

Aus der Forderung der Lokalität für die Felder $\varphi^{+}_{\dot{\beta}'}(\frac{x}{2}) \; \varphi_{\beta'}(\frac{x}{2})$ folgt dann die Konvergenz der Integraldarstellung (5, 5)

für $Re\, z_s > 0$ falls $\sqrt{-q^2} > 0$ d.h. für $Re\, z_s > 0$ falls wir in $q^2$ die Summe der Massenquadrate $s = \mu'^2 + \mu''^2$ zu unphysikalischen Werten $s < t + \frac{1}{t}(\mu'^2 - \mu''^2)^2$ fortsetzen, bei festem $t < 0$ und $(\mu'^2 - \mu''^2)^2$. Das T-Matrixelement (5, 5) ist dann analytisch für $Re\, z_s > 0$ bis auf einen Verzweigungsschnitt bei $1 < z_s \leq \infty$

$\{ p' \dot{A}, q' \dot{B}' | T | p'' A'', q'' B'' \zeta^* \}$ konvergiert für $Re\, z_s < 0$ falls $\sqrt{-q^2} > 0$ und ist dort analytisch bis auf einen Verzweigungsschnitt bei $-\infty < z_s < -1$

Schließlich soll

$$\{ p'' A'' q'' B'' | T - T^+ | p' \dot{A}', q' \dot{B}' \zeta' = \tag{5, 9}$$

$$= i \int d^4x\, e^{i \frac{q' + q''}{2} x} \times \{ p'' A'' | [ j_{B''}(\tfrac{x}{2}), j^+_{\dot{B}'}(-\tfrac{x}{2}) ] | p' \dot{A} \zeta \}$$

mit

$$j^+_{\dot{B}'}(x) = (\Box_x + \mu'^2)\, \varphi^+_{\dot{B}'}(x) \tag{5, 10}$$

$$j_{B''}(y) = (\Box_y + \mu''^2)\, \varphi_{B''}(y)$$

für alle $z_s$ auf der imaginären Achse existieren. Schieben wir in dem Stromkommutator-Matrixelement in (5, 9) Zwischenzustände ein, und vernachlässigen der Einfachheit halber Einteilchenzwischenzustände und anomale Schwellen, so sieht man, genauso wie im spinlosen Fall, daß (5, 9) unterhalb der Zwei-Teilchen-Schwellen

$$s = (p' + q')^2 < \mathrm{Min}\left( (M' + \mu')^2, (M'' + \mu'')^2 \right)$$

$$u = (p' - q'')^2 < \mathrm{Min}\left( (M' + \mu'')^2, (M'' + \mu')^2 \right)$$

verschwindet. Ist $(M + \mu)^2$ das Minimum dieser Schwellen, so bedeutet dies, daß

$\{ p'' A'' q'' B'' | T | p' \dot{A}', q' \dot{B}' \zeta' \}$ und $\{ p' \dot{A}', q' \dot{B}' | T | p'' A'' q'' B'' \zeta'^* \}$

auf einem Stück $i z_0 < Im\, z_s < -i z_0$ $\quad Re\, z_s = 0$

der imaginären $z_s$ -Achse identisch sind.

Unser T-Matrixelement (5, 5) in der Spinorbasis ist also für $\sqrt{q^2} > 0$ analytisch in der ganzen $z_s$ -Ebene bis auf zwei "dynamische" Schnitte:

$$-\infty < \mathrm{Im}\, z_s \leq -i z_0 \qquad i z_0 \leq \mathrm{Im}\, z_s < \infty \qquad \mathrm{Re}\, z_s = 0 \tag{5,11}$$

und zwei weitere Schnitte $\qquad -\infty < z_s < -1 \qquad 1 < z_s < \infty$ (5, 12)

die im folgenden näher untersucht werden.

b) Dispersionsrelationen

Zerlegen wir (5, 5) mit Hilfe der Spinorbasis I(4, 10) nach invarianten Funktionen:

$$\{ \mu'' A'' q'' B'' | T | \mu' \dot{A}' q' \dot{B}' \} = \mathcal{D}^{s'}_{\bar{A}' \dot{A}'} \left( \frac{p_0' - \vec{p}'\vec{\sigma}}{M'} i\sigma_2 \right) \mathcal{D}^{\sigma'}_{\bar{B}' \dot{B}'} \left( \frac{q_0' - \vec{q}'\vec{\sigma}}{\mu'} i\sigma_2 \right) \tag{5,13}$$

$$(A'' \bar{A}', B'' \bar{B}' / T\alpha)\; T^{J}_{\alpha}\; (p'', q'', p', q')$$

$$T^{J}_{\alpha}(p'' q'' p' q') = \sum_{j=0}^{J} b^{(+)}(j' J, z_s, t, \sqrt{q^2})\; V^{(+)}_{\alpha}(j' J, P, Q, q) \tag{5,14}$$

$$+ \sum_{j=0}^{J-1} b^{(-)}(j' J, z_s, t, \sqrt{q^2})\; V^{(-)}_{\alpha}(j' J, P, Q, q)$$

so sieht man unmittelbar, daß die invarianten Funktionen $b^{(\pm)}(j' J, z_s, t, \sqrt{q^2})$ die Verzweigungsschnitte (5, 12) nicht haben:

$$b^{(\pm)}(j' J, z_s, t, \sqrt{q^2}) = -\int d^4x\, e^{i \frac{q' + q''}{2} x}\; X^{(\pm)}(j' J, TQq)^{\alpha}(\alpha | A'' \bar{A}'\, B'' \bar{B}') \tag{5,15}$$

$$\mathcal{D}^{s'}_{\dot{A}' \bar{A}'} \left( i\sigma_2 \frac{p_0' + \vec{p}'\vec{\sigma}}{M'} \right) \mathcal{D}^{\sigma'}_{\dot{B}' \bar{B}'} \left( i\sigma_2 \frac{q_0' + \vec{q}'\vec{\sigma}}{\mu'} \right) \{ p'' A'' | R' \rho_{B''} \left( \tfrac{x}{2} \right) \varphi^{+}_{\dot{B}'} \left( -\tfrac{x}{2} \right) | p' A' \}$$

$$= \int d^4x\, e^{i \frac{q' + q''}{2} x}\; \tilde{b}(j' J, x^2, (qx), (Qx), (Px), (qQ), (qP), (QP), P^2, Q^2, q^2)$$

Die Integration über $x_1$ verschwindet nur dann nicht, wenn der Integrand eine gerade Funktion in $x_1$ ist; dann ist er aber in unserem speziellen System I auch eine in $q_1 = \sqrt{q^2}\, \sqrt{z_s^2 - 1}$

Die invarianten Funktionen können also höchstens noch kinematische Pole bei $z_s = \pm 1$ haben, die durch die orthogonalen Spinoren $X^{(\pm)}(j\mathcal{J}, PQf)^{\alpha}$ eingeführt werden. Aus (4,15) und (4,22) ersieht man, daß die Ordnung dieser Pole höchstens $\frac{\mathcal{J}}{2}$ bzw. $\frac{\mathcal{J}-1}{2}$ sein kann, je nachdem ob $\mathcal{J}$ gerad- oder ungeradzahlig ist.

Abgesehen von diesen möglichen kinematischen Polen, auf die wir später zurückkommen werden, erfüllen also für $\sqrt{q^2} \to 0$ und falls $b^{(\pm)}(j\mathcal{J}, z_s, t, \sqrt{q^2})$ $\to 0$ für $|z_s| \to \infty$ die invarianten Funktionen Dispersionsrelationen:

$$b^{(\pm)}(j\mathcal{J}, z_s, t, \sqrt{q^2}) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-i\infty}^{-z_0} + \int_{z_0}^{i\infty}\right) dz'_s \, \frac{\beta^{(\pm)}(j\mathcal{J}, z'_s, t, \sqrt{q^2})}{z'_s - z_s} \qquad (5,16)$$

mit $z_0 = \frac{i}{4\sqrt{Q^2}\sqrt{-q^2}}\left\{2(M^2+\mu)^2 + t - (M'^2+M^2+s) - \frac{1}{t}(M'^2-M^2)(\mu'^2-\mu^2)\right\}$

Für die Spektralfunktionen $\beta^{(\pm)}(j\mathcal{J}, z'_s, t, \sqrt{q^2})$ gilt eine zu (5,15) analoge Darstellung. Man muß nur in (5,15) das zeitgeordnete Operatorprodukt $\mathcal{P}' \varphi_{\beta\gamma}(\frac{x}{2}) \varphi^{+}_{\gamma'\beta'}(-\frac{x}{2})$ durch den Stromkommutator $[j_{\beta\gamma}(\frac{x}{2}), j^{+}_{\gamma'\beta'}(-\frac{x}{2})]$ ersetzen.

Die Schnitte in (5,16) verschwinden für $\sqrt{-q^2} \to +0$ entlang der imaginären $z_s$-Achse im Unendlichen um für $\sqrt{q^2} > 0$ aus dem Unendlichen von der reellen Achse her wieder aufzutauchen. Falls eine solche Fortsetzung der $q^2$-Werte entlang der reellen $q^2$--Achse möglich ist, erhalten wir auch bei physikalischen Werten $q^2$ d.h. $s = \mu'^2 + \mu^2$ Dispersionsrelationen für die invarianten Amplituden; die möglichen kinematischen Pole bei $z_s = \pm 1$ liegen dann auf den dynamischen Schnitten. Schreibt man die Dispersionsrelationen nicht in der Variablen $z_s$, sondern in $s = (p+q')^2$ auf, so läßt sich bekanntlich im spinlosen Fall mit Hilfe der Jost-Lehmann-Dyson Darstellung [16] beweisen, daß die Spektralfunktion für festes $s \geq (M+\mu)^2$ und $t_0 < t < 0$, wobei $t_0$ von den Massen der äußeren Teilchen abhängt, eine analytische Funktion in $q^2$ in einem schmalen Streifen längs der reellen Achse ist. Wir nehmen im folgenden an, daß Dispersionsrelationen der Art (5,16) auch für $q^2 > 0$ gelten; insbesondere werden wir Dispersionsre-

lationen zu dem unphysikalischen Wert $q^2 = \hat{q}^2 > 0$ verwenden, deren Schnitte bei $z_0 = \hat{z}_0 = \pm 1$ beginnen:

$$b^{(\pm)}(J^P, \hat{z}_s, t, \sqrt{\hat{q}^2}) = \frac{1}{\pi}\left(\int_{-\infty}^{-1} + \int_{1}^{\infty}\right) d\hat{z}_s' \frac{\beta^{(\pm)}(J^P, \hat{z}_s', t, \sqrt{\hat{q}^2})}{\hat{z}_s' - \hat{z}_s} \tag{5,17}$$

$$\hat{z}_s = \frac{\hat{q}_0}{\sqrt{\hat{q}^2}} = \frac{1}{4\sqrt{Q^2}\sqrt{\hat{q}^2}}\left(2s + t - (M'^2 + M^2 + \hat{s}) - \frac{1}{t}(M^2 - M'^2)(\mu'^2 - \mu^2)\right) \tag{5,18}$$

$$\hat{q}^2 = \frac{1}{4}\left(\hat{s} - t - \frac{1}{t}(\mu^2 - \mu'^2)\right) \tag{5,19}$$

$$Q^2 = \frac{1}{4}\left(2(M'^2 + M^2) - t - \frac{1}{t}(M'^2 - M^2)\right) \tag{5,20}$$

Der zugehörige Wert der Summe der Massenquadrate $s = \hat{s}(t)$ bestimmt sich aus der Gleichung:

$$\frac{1}{2\sqrt{Q^2}}\left(2(M+\mu)^2 + t - (M'^2 + M^2 + \hat{s}) + \frac{1}{t}(M'^2 - M^2)(\mu^2 - \mu'^2)\right) \tag{5,21}$$

$$= \left(2\hat{s} - t - \frac{1}{t}(\mu^2 - \mu'^2)^2\right)^{1/2}$$

## 6. Kap. Partialwellenentwicklung im unphysikalischen Bereich des t-Kanals

### a) Der spinlose Fall

Zur Beschreibung des Hochenergieverhaltens [18] von Streuprozessen wurde zum ersten Male von T. REGGE[19] für den Fall der Potentialstreuung die bekannte Sommerfeld-Watson-Formel hergeleitet. Im relativistischen Fall gewinnt man diese durch analytische Fortsetzung mit Hilfe der Mandelstam darstellung aus der Partialwellenentwicklung der T-Matrixelemente. Nach dieser mehr phänomenologischen Herleitung wurden eine Reihe von Versuchen unternommen, diese Formel aus gruppentheoretischen Überlegungen zu gewinnen[20] [21] [22]. Es gibt im wesentlichen zwei verschiedene Ansätze. Beim ersten führt man das in der Einleitung diskutierte Kopplungsschema - je ein ein- und ein auslaufender Zustand werden zu einem Zustand zur Masse $p^2 = (p' - p'')^2 \leq (M' - M'')^2$ bzw. $t^2 = (q'' - q')^2 \leq (\mu'' - \mu')^2$ zusammengekoppelt - für das T-Matrixelement selbst durch. Für den spinlosen Fall erhält man dann z.B. im System I

$$\langle p'' q'' | T | p' q' \rangle = T(s,t) = \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\,\cot\pi\ell\; A(t,\ell)\, P_\ell(z_s) \qquad (6,1)$$

$$A(t,\ell) = \int_1^\infty dz_s\, T(s,t)\, P_\ell(z_s)\,; \quad z_s = -1 + \frac{2s}{4M^2 - t}\,; \quad q'^2 = q''^2 = p'^2 = p''^2 = M^2 \qquad (6,2)$$

(6,1) und (6,2) gelten zunächst offenbar nur, wenn $T(s,t)$ quadratintegrabel in $s$ bzw. $z_s$ und $z_s > 1$ ist. Führen wir für $T(s,t)$ in (6,2) eine einfache Dispersionsrelation ein:

$$T(s,t,u) = \frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^\infty ds' \frac{M_s(s',t)}{s' - s} + \frac{1}{\pi} \int_{4M^2}^\infty du' \frac{M_u(u',t)}{u' - u} \qquad (6,3)$$

so können wir mit Hilfe der Mehler-Formel (2,12) nur die Integration über die physikalischen Bereiche $z_s \geq 1$ $\quad s \geq 4M^2 - t$ bzw. $z_u \geq 1$ $\quad u \geq 4M^2 - t$ ausführen.

$$C_s(t,\ell) = \int_1^\infty dz_s \frac{1}{\pi} \int_{4M^2-t}^\infty ds' \frac{M_s(s',t)}{s'-s} P_\ell(z_s)$$

$$= \frac{2}{\pi} \int_{4M^2-t}^\infty ds' \frac{1}{4M^2-t} \frac{\pi}{\sin\pi\ell} P_\ell(-z'_s)\, M_s(s',t) \qquad (6,4)$$

Die Vollständigkeitsrelation (2,14) und (2,4) liefern dann

$$\int_{4M^2-t}^\infty ds' \frac{M_s(s',t)}{s'-s} P_\ell(z'_s) = \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell \frac{2\ell+1}{\sin\pi\ell} \hat{C}_s(t,\ell) P_\ell(-z_s) \qquad (6,5)$$

mit $$\hat{C}_s(t,\ell) = \int_1^\infty dz'_s M_s(s',t) Q_\ell(z'_s) \qquad (6,6)$$

(6,5) gilt jetzt für alle $z_s$, die nicht auf dem Schnitt $z_s > 1$ der Legendre Funktion $P_\ell(-z_s)$ liegen. Die Entwicklung (6,5) reproduziert also genau die analytische Struktur des auf der linken Seite von (6,5) stehenden Anteils der Dispersionsrelation (6,3) [21]. In wieweit ist nun diese Aufspaltung der Integrationen in der Dispersionsrelation sinnvoll? Welche physikalische Bedeutung haben die reduzierten Matrixelemente $\hat{C}_s(t,\ell)$ der Entwicklung (6,5)? In welchem Zusammenhang stehen sie mit den Partialwellenamplituden des t-Kanals? Für letztere gilt bekanntlich

$$G(t,\ell) = E_s(t,\ell) + (-1)^\ell E_u(t,\ell) \qquad (6,7)$$

$$E_s(t,\ell) = \frac{2}{4M^2-t} \int_{4M^2}^\infty ds' M_s(s',t) Q_\ell(z'_s) \qquad (6,8)$$

Sie sind, wenn wir für $T(s,t)$ die Gültigkeit der Mandelstamdarstellung fordern, analytisch in der ganzen t-Ebene bis auf zwei Schnitte:

$$-\infty < t < 0 \qquad \text{und} \qquad 4M^2 < t < \infty$$

$\hat{C}_s(t,\ell)$ hat offenbar - auch bei Gültigkeit der Mandelstamdarstellung! - keine analytischen Eigenschaften in der t-Ebene, denn das würde Analytizität von $M_s(s',t)$ in der t- und S'-Ebene voraussetzen.

Die Aufspaltung der Dispersionsintegrale in physikalische und unphysikalische Anteile scheint also von diesem Gesichtspunkt aus nicht empfehlenswert. Vielmehr ist eine Darstellung, wie die Sommerfeld-Watson-Formel, wesentlich geeigneter die analytischen Eigenschaften der T-Matrixelemente zu beschreiben.

H. JOOS [22] wendet das oben angegebene Kopplungsschema nicht auf das T-Matrixelement selbst an, sondern auf das Stromkommutatormatrixelement:

$$\langle p'' | [j(q''), j^+(q')] | p' \rangle = i\,\delta(p''+q''-p'-q') \cdot \int d^4x\, e^{i\frac{q'+q''}{2}x} \langle p'' | [j(\tfrac{x}{2}), j^+(-\tfrac{x}{2})] | p' \rangle \qquad (6,9)$$

Auf der rechten Seite hinter der Energie-Impulserhaltungs $-\delta$ -Funktion steht der Imaginärteil der Streuamplitude, der für $s > 4M^2$ gleich der Spektralfunktion $M_s(s,t)$ , für $u > 4M^2$ gleich $M_u(u,t)$ ist. Man erhält so

$$M_s(s,t) = \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\, \hat{c}_s(t,\ell)\, P_\ell(z_s) \qquad (6,10)$$

$$\hat{c}_s(t,\ell) = \pi \int_1^\infty dz_s\, M_s(s,t)\, Q_\ell(z_s) \qquad (6,11)$$

Setzt man (6,8) in die Dispersionsrelation (6,3) ein und versucht die $s$ bzw. $z_s$ -Integration in der Dispersionsrelation

$$\int_{-1+\frac{8M^2}{4M^2-t}}^{\infty} dz'_s\, \frac{P_\ell(z'_s)}{z'_s - z_s}$$

mit Hilfe der Mehlerformel auszurechnen, so stößt man wieder auf das alte Problem. Nur das Integral über $z'_s > \Lambda$ läßt sich ausführen.
Zu einer Lösung des Problems gelangt man, wenn man nicht von den Dispersionsrelationen für die physikalischen Massen $q'^2 = M^2$, $q''^2 = M^2$ ausgeht, sondern von solchen zu unphysikalischen, $t$-abhängigen $q'^2 = q''^2 = \mu^2(t)$ die so gewählt werden, daß die unterste Schwelle gerade bei

$$\hat{z}_s = \frac{2s+t-2(M^2+\mu^2(t))}{\sqrt{4M^2-t}\ \sqrt{4\mu^2(t)-t}}\Big|_{s=4M^2} = 1 \qquad (6,12)$$

liegt. Solche Dispersionsrelationen haben wir bereits in (5,17) angegeben. Ihre Bedeutung wird hier evident.

Die Spektralfunktion $M_s(s,t,\mu(t))$ analysieren wir nun bei unphysikalischen Massen $q'^2 = q''^2 = \mu^2(t)$. Für $0 > t > \frac{17}{4}M^2$ ist dies immer möglich, denn dann ist $\mu^2(t) > 0$. Für $t < -\frac{17}{4}M^2$ dagegen ist $\mu^2(t) < 0$. Hier müssen wir voraussetzen, daß sich $M_s(s,t,\mu^2)$ zu festem s und t in $\mu^2$ analytisch fortsetzen läßt von $\mu^2 > 0$ nach $\mu^2 = \mu^2(t) = 8M^2 - 2M\sqrt{4M^2-t}$

$$M_s(s,t,\mu) = \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\,\hat{c}_s(t,\ell,\mu)\,P_\ell(\hat{z}_s) \qquad (6,13)$$

$$\hat{c}_s(t,\ell,\mu) = \int_1^\infty d\hat{z}_s\, M_s(s,t,\mu=\mu(t))\,Q_\ell(\hat{z}_s) \qquad (6,14)$$

$$= \frac{2}{\sqrt{4M^2-t}\sqrt{4\mu^2(t)-t}} \int_{4M^2}^\infty ds\, M_s(s,t,\mu(t))\,Q_\ell\left(\frac{2s+t-2(M^2+\mu^2(t))}{\sqrt{4M^2-t}\sqrt{4\mu^2(t)-t}}\right)$$

Die Mehlerformel erlaubt jetzt die Integrationen in den Dispersionsrelationen vollständig auszuführen:

$$T(s,t,\mu(t)) = \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\,\frac{1}{2i\sin\pi\ell}\left(\hat{c}_s(t,\ell,\mu(t))\,P_\ell(-\hat{z}_s) + \hat{c}_u(t,\ell,\mu(t))\,P_\ell(\hat{z}_s)\right) \qquad (6,15)$$

Die Schnitte der Legendre Funktionen $P_\ell(-\hat{z}_s)$ und $P_\ell(\hat{z}_s)$ geben genau die Schnitte der Dispersionsrelationen:

$$\hat{z}_s \geq 1 \qquad \text{und} \qquad \hat{z}_s \leq -1$$

wieder. Setzen wir jetzt (6,14) und (6,15) in $\mu^2$ bei festem s und t von den unphysikalischen Massenwerten $q'^2 = q''^2 = \mu^2(t)$ wieder zu den physikalischen $q'^2 = q''^2 = M^2$ analytisch fort, so geht (6,15) gerade in die Sommerfeld-Watson-Formel - für quadratintegrable Amplituden - und (6,14) in die Funktionen (6,8) über. Die Schnitte der T-Matrix lassen sich nun allerdings nicht mehr einfach an den Schnitten

Legendre-Funktionen $P_\ell(z_s)$ und $P_\ell(-z_s)$ in der Sommerfeld-Watson-Forme ablesen, danach hätte nämlich $T(s,t)$ bei festem $t<0$ Schnitte für $z_s \geq 1$ und $z_s \leq -1$ d.h. $s \leq 0$ und $s \geq 4M^2 - t$. Während die Dispersionsrelationen solche für $s \leq -t$ und $s \geq 4M^2$ vorschreiben [23].

Wir wollen nun die rechnerischen Details der obigen Herleitung der Sommerfeld-Watson-Formel für den allgemeinen Fall eines T-Matrixelementes mit beliebigen Spins und Massen der beteiligten Teilchen an Hand der zweiten Methode von H. JOOS durchführen.

b) Ausreduktion des Stromkommutatormatrixelementes

Für die Spektralfunktionen $\beta^{(\pm)}(j,J,z_s,t,\sqrt{q^2})$ besteht nach (5,15) und (5,9) der folgende Zusammenhang mit dem Stromkommutatormatrixelement:

$$\beta^{(\pm)}(j,J,z_s,t\sqrt{q^2}) = X^{(\pm)}(j,J,PQq) \propto (\sim |A'A''B'B''|) \mathcal{D}^{J''}_{A'S_3''}(L(p'',q'')) \mathcal{D}^{\sigma''}_{B''\sigma_3''}(L(q'',q'')) \cdot \quad (6,16)$$

$$\cdot M(p''S_3'', q''\sigma_3'', p'S_3', q'\sigma_3') \mathcal{D}^{S'}_{S_3'A'}(L(p'),\sigma_2) \mathcal{D}^{\sigma'}_{\sigma_3'B'}(L(q'),\sigma_2)$$

mit

$$M(p''S_3'', q''\sigma_3'', p'S_3', q'\sigma_3') \, \delta(p''+q''-p'-q')$$

$$= \langle p''S_3'' | [j(q''\sigma_3''), j^+(q'\sigma_3')] | p'S_3' \rangle$$

$$j(q''\sigma_3'') = \int d^4y \, e^{-iq''y} \, j_{A''}(y) \, \mathcal{D}^{\sigma''}_{A''\sigma_3''}(L(q'')) \quad (6,17)$$

Die Stromoperatoren $j(q''\sigma_3'')$, $j^+(q'\sigma_3')$ transformieren sich wie die Zustände $\langle q''\sigma_3''|$ bzw. $|q'\sigma_3'\rangle$ der kanonischen Basis. Wir können das Operatorprodukt $j(q''\sigma_3'')\, j^+(q'\sigma_3')$ formal nach "irreduziblen" Operatoren $\mathcal{F}(p^2,\ell,\eta;pM)$ zerlegen.

Auf das Matrixelement

$$\langle p''S_3'' | \mathcal{F}(p^2,\ell,\eta;pM) | p'S_3' \rangle$$

wenden wir dann das Wigner-Eckart-Theorem (3,14) an:

$$\langle \mu'' s_3'' | [j^\mu(q''\sigma_3''), j^\nu(q'\sigma_3')] | \mu' s_3' \rangle = \sum_{\ell, m, \eta, \tilde{\eta}} \int_{-\infty}^{(\mu''-\mu')^2} dP^2 \int d\Omega_{P^2}(P) \cdot$$

(6,18)

$$C(P^2 Q'^2 q''^2, \ell, \eta\tilde{\eta}) \cdot \begin{pmatrix} M' s' -1 & M'' s'' +1 \\ -\mu' s_3' & \mu'' s_3'' \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} P^2 \ell \\ P m \end{matrix} \tilde{\eta} \Big) \Big( \begin{matrix} P^2 \ell \\ P m \end{matrix} \eta \Big| \begin{matrix} \mu' \sigma' & 1 \\ q' \sigma_3' & -q'' \sigma_3'' \end{matrix} \Big) D^{s'}_{s_3' s_3'}(i\sigma_2) D^{\sigma''}_{\sigma_3' \sigma_3''}(i\sigma_2)$$

Für $P^2 < 0$ erweist sich das System (4,7) als besonders zweckmäßig zur Berechnung der Clebsch-Gordan-Koeffizienten:

$$\begin{pmatrix} M' s' -1 & M'' s'' 1 \\ -\mu' s_3' & \mu'' s_3'' \end{pmatrix} \Big| \begin{matrix} P^2 \ell \\ P m \end{matrix} \eta \cdot (Q' q'') \Big) = N(P^2, Q'^2 \ell)\, \delta(P + p' - p'')\, \delta_{\lambda' + \lambda'', m}\, \delta_{\lambda' s_3'}\, \delta_{\lambda'' s_3''} \qquad (6,19)$$

$$\begin{pmatrix} P^2 \ell \\ P m \end{pmatrix} \eta = (\nu' \nu'') \Big| \begin{matrix} \mu' \sigma' & \mu'' \sigma'' \\ q' \sigma_3' & -q'' \bar{\sigma}_3'' \end{matrix} \Big) = N^*(P^2, Q'^2, \ell)\, \delta(P + q'' - q') \cdot D^{\ell\,*}_{\nu' + \nu'', m}(L(q')) \cdot \qquad (6,20)$$

$$\cdot D^{\sigma'\,*}_{\sigma_3' \nu'}(R(q')) \; D^{\sigma''\,*}_{\bar{\sigma}_3'' \nu''}(R(q''))$$

Setzen wir (6,4), (6,5) und (6,6) in (6,1) ein, so erhalten wir für die Spektralfunktionen $\rho^{(t)}(j', J, z_s, t, \overline{q^2})$ die folgende Partialwellenentwicklung im unphysikalischen Bereich des t-Kanals:

$$\rho^{(t)}(j' J, z_s, t, \overline{q^2}) = X^{(t)}(j' J, PQq)^{\alpha} (\alpha | A' A'' B' B'') \cdot \qquad (6,21)$$

$$\cdot D^{s'}_{A'' \lambda''}(L^{-1}(p'')) \; D^{\sigma''}_{B'' \nu''}(L^{-1}(q'') i\sigma_2 R^*(q'')) \; \left(\frac{-16P^2}{Q^2}\right)^{1/4} \left(\frac{-16P^2}{q^2}\right)^{1/4} \cdot$$

$$\cdot \Bigg\{ \int_{-\frac{1}{2}+i0}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\, (2\ell+1)\, \mathrm{Cot}\pi(\ell - \lambda'' - \lambda')\, C(P^2 Q'^2 q''^2, \ell, \lambda' \lambda'' \nu'' \nu')\, d^{\ell}_{\lambda' + \lambda'', \nu' + \nu''}(z_s)$$

$$+ \sum_{\ell = 0, \frac{1}{2}}^{M-1} (2\ell+1)\, C(P^2 Q'^2, q''^2, \ell, \lambda'' \lambda' \nu'' \nu' |\, d^{\ell}_{\lambda', \lambda'', \nu' + \nu''}(z_s) \Bigg\} \cdot$$

$$\cdot D^{s'}_{\lambda' A'}(L^{-1}(p')) \; D^{\sigma'}_{\nu' B'}(L^{-1}(q') L(q') i\sigma_2)$$

Mit $$M = \mathrm{Min}(|\lambda' + \lambda''|, |\nu' + \nu''|) \qquad (6,22)$$

In dem System I nehmen die Darstellungsmatrizen zu den Transformationen $L(p'), L(p''), L(L(q)q'), L(L(q)q'')$ alle Diagonalform an; sie hängen auch nicht von $z_s = \frac{q_0}{\sqrt{q^2}}$ ab. Wir fassen diese Transformationen so wie die Normierungen $\left(\frac{-16p^2}{Q^2}\right)^{1/4}$, $\left(\frac{-16p^2}{q^2}\right)^{1/4}$ der Clebsch-Gordan-Koeffizienten mit den reduzierten Matrixelementen $C(p^2,Q^2,l,\lambda''\lambda',\nu''\nu')$ zu einer neuen Größe zusammen:

$$E(t,q^2;l,A''A',B''B') = \left(-\frac{16p^2}{Q^2}\right)^{1/4}\left(-\frac{16p^2}{q^2}\right)^{1/4} D^{s''}_{A''\lambda''}(L^{-1}(p'')) D^{\sigma''}_{B''\nu''}(L^{-1}(L(q)q'')\,i\sigma_2)\cdot \tag{6,23}$$

$$\cdot C(p^2,Q^2,q^2,l,\lambda''\lambda',\nu''\nu')\cdot D^{s'}_{\lambda'A'}(L^{-1}(p'))\, D^{\sigma'}_{\nu B'}(i\sigma_2 L^{-1}(L(q)q'))$$

$$\beta^{(t)}(q\vartheta,z_s,t,\sqrt{q^2}) = \chi^{(t)}(j\vartheta,PQq)^{\alpha}(\alpha|A'A'B''B')\cdot$$

$$\cdot\Bigg\{\int_{-\frac{1}{2}+i\sigma}^{-\frac{1}{2}+i\sigma_0} dl\,(2l+1)\cot\pi(l-A'-A'')\,E(t,q^2;l,A''A',B''\bar{B}')\,d^{l}_{A'+A'',-B'-\bar{B}''}(z_s) \tag{6,24}$$

$$+\sum_{l=0,\frac{1}{2}}^{M-1}(2l+1)E(t,q^2;l,A''A'\bar{B}''B')\,d^{l}_{A+A'',-\bar{B}'-\bar{B}''}(z_s)\Bigg\}d^{\sigma'}_{\bar{B}'B'}(z_s)\,d^{\sigma''}_{\bar{B}''B'}(z_s)$$

$$M = M_{in}(|A'+A''|,|\bar{B}'+\bar{B}''|)$$

Auf Grund der Orthogonalitätsrelationen (2, 3) können wir (6, 21) invertieren:

$$E(t,q^2;l,A''A',B''\bar{B}') = \int_{-\infty}^{\infty} dz_s\, M(p''A'',q''\bar{B}'',p'A',q'\bar{B}')\,d^{l}_{A'+A'',-\bar{B}'-\bar{B}''}(z_s) \tag{6,25}$$

Führen wir in (6, 21) an Stelle der reduzierten Matrixelemente (6, 22) die Funktionen

$$\tilde{E}(t,q^2;l,A''A'\,\bar{B}''\bar{B}') = \int_{-\infty}^{\infty} dz_s\, M(p''A'',q''\bar{B}'',p'A',q'\bar{B}')\,e^{l}_{A'+A'',-\bar{B}'-\bar{B}''}(z_s) \tag{6,26}$$

ein, so erhalten wir eine der Sommerfeld-Watson-Formel ähnliche Darstellung (vgl. (6, 8) für den spinlosen Fall):

$$\mathcal{B}^{(t)}(j\mathcal{J}, z_s, t, \overline{q^2}) = X^{(t)}(j\mathcal{J}, PQq)^{\nu}(\alpha | A''A' B''B') \cdot$$

$$\left\{ \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\, \hat{E}(t, q^2, \ell A''A', B''B')\, d^{\ell}_{A'+A'', -\overline{B}'-\overline{B}''}(z_s) \right.$$

$$\left. + \sum_{\ell=\frac{1}{2}}^{M-1} (2\ell+1) E(t, q^2, \ell, A''A', B''B')\, d^{\ell}_{A'+A'', -\overline{B}'-\overline{B}''}(z_s) \right\} \cdot$$

$$\cdot\, d^{\sigma'}_{\overline{B}'B'}(z_s)\, d^{\sigma''}_{\overline{B}''B''}(z_s) \qquad (6,27)$$

Für $\ell = -\frac{1}{2} + i\varrho$ existiert $\hat{E}(t, q^2, \ell, A''A', B''B')$ offensichtlich nur, wenn zu festem $t<0$ $M(\mu''A''q''B'', \nu'A'q'B')$ quadratintegrabel in $S$ ist. Dies ist bei solchen Amplituden, die die in der Natur vorkommenden Streuprozesse beschreiben sollen, im allgemeinen nicht der Fall. Ist z.B.

$$M(\mu''A''q''B''\,\nu'A'q'B') \sim z_s^{L} \qquad \text{für} \quad z_s \to \infty$$

so existiert $\hat{E}(t, q^2, \ell A''A', B''B')$ nur für $Re\,\ell > L$. Doch auch für die nicht unitären Darstellungen der dreidimensionalen Lorentzgruppe existiert eine Vollständigkeitsrelation (2,15)

$$\int_{-i\infty+L}^{i\infty+L} d\ell\,(2\ell+1)\, d^{\ell}_{\mu\nu}(z)\, d^{\ell}_{\mu\nu}(z') = \delta(z-z') \qquad , z, z' \in [1, \infty] \qquad (6,28)$$

wobei wir der Einfachheit halber $L > M-1$ vorausgesetzt haben. (6,28) erlaubt dann (6,27) zu invertieren:

$$\mathcal{B}^{(t)}(j\mathcal{J}, z_s, t, \overline{q^2}) = X^{(t)}(j\mathcal{J}, PQq)^{\alpha}(\alpha | A'A'' B'B'')$$

$$= \int_{L-i\infty}^{L+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\, \hat{E}(t, q^2, \ell, A''A', \overline{B}''\overline{B}')\, d^{\ell}_{A'+A'', -\overline{B}'-\overline{B}''}(z_s) \cdot \qquad (6,29)$$

$$\cdot\, d^{\sigma'}_{\overline{B}'B'}(z_s)\, d^{\sigma''}_{\overline{B}''B''}(z_s) \qquad z_s > 1$$

(6,26) ist also eine Entwicklung nach nicht unitären Darstellungsmatrizen der dreidimensionalen Lorentzgruppe,

c) Sommerfeld-Watson-Formel, Regge-Pole, Nonsense [illegible] und ihre gruppentheoretische Interpretation

Wie im spinlosen Fall wollen wir uns nun (6,29) analytisch fortgesetzt denken in $q^2$ -bzw. in den Massenquadraten $s = q'^2 + q''^2$ , und zwar zu festem $s$ und $t$ von dem physikalischen Wert (5,8) zu dem unphysikalischen $\hat{q}^2$ (5,19), der zu den Dispersionsrelationen (5,17) führt.

Mit (4,18) sieht man leicht, daß die $\hat{z}_s$ -Abhängigkeit in (6,29) explizit gegeben wird durch Ausdrücke der Art:

$$X^{(\pm)}(jJ, PQq)^{A'+A''+B'+B''} d^{\ell}_{A'+A''_1-B'-B''}(\hat{z}_s)\, d^{\sigma'}_{B'B'}(\hat{z}_s)\, d^{\sigma''}_{B''B''}(\hat{z}_s) = \tag{6,30}$$

$$- d^{\ell}_{A'+A''_1-B'-B''}(\hat{z}_s) \left(\frac{\hat{z}_s+1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}|A'+A''-B'-B''|} \left(\frac{\hat{z}_s-1}{2}\right)^{-\frac{1}{2}|A'+A''+B'+B''|} P_N(\hat{z}_s)$$

wie sie in der verallgemeinerten Mehlerformel (2,13) auftreten. Dabei ist $P_N(\hat{z}_s)$ ein Polynom in $\hat{z}_s$ der Ordnung N. Um die Mehlerformel (2,13) zur Ausrechnung der Integrale in den Dispersionsrelationen (5,17) anwenden zu können, müssen wir letztere vorher (N+L)-mal subtrahieren, damit ihre Konvergenz gesichert ist. In unserem Falle ist es günstiger, die (N+L)-mal nach $\hat{z}_s$ abgeleiteten Amplituden zu betrachten, für die unsubtrahierte Dispersionsrelationen mit den Spektralfunktionen $\frac{d^{N+L}}{d\hat{z}_s^{N+L}} b^{(\pm)}(jJ, \hat{z}_s, t, \hat{q}^2)$ existieren. Unter Verwendung von (6,29), (6,30) und (2,13) erhalten wir dann, analog zum spinlosen Fall,

$$\frac{d^{N+L}}{d\hat{z}_s^{N+L}} b^{(\pm)}(jJ, \hat{z}_s, t, \hat{q}^2) = \int_{L-i\infty}^{L+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\, \frac{d^{N+L}}{d\hat{z}_s^{N+L}} \Big\{ X^{(\pm)}(jJ, PQq)^{\alpha} \tag{6,31}$$

$$(\alpha|A'A''B'B'') \frac{\pi}{2i\sin\pi(\ell-A'-A'')} \Big[ \hat{E}_s(t, \hat{q}^2, \ell, A''A'B''B') d^{\ell}_{A'+A'', B'+B''}(\hat{z}_s)$$

$$+ \hat{E}_u(t, \hat{q}^2, \ell, A''A'B''B') d^{\ell}_{A'+A'', -B'-B''}(\hat{z}_s) \Big] d^{\sigma''}_{B''B''}(\hat{z}_s)\, d^{\sigma'}_{B'B'}(\hat{z}_s) \Big\}$$

$$\hat{E}^{\hat{}}_{s,u}(t,\vec{q}^{\,12},\ell,A''A'\bar{B}''\bar{B}') = \int_{1}^{\infty} d\hat{z}^{\hat{}}_{s,u}\, M(\mu''A''q''\bar{B}'',\mu'A'q'\bar{B}')\, d^{\ell}_{A'+A'',\mp\bar{B}+\bar{B}''}(\hat{z}^{\hat{}}_{s}) \qquad (6,32)$$

$$\hat{z}^{\hat{}}_{s} = -\hat{z}^{\hat{}}_{u}$$

Wollen wir in (6,31) den $\ell$-Integrationsweg von $Re\,\ell = L$ wieder nach $Re\,\ell = -\frac{1}{2}$ verschieben, so müssen wir etwas über die analytischen Eigenschaften der Funktionen $\hat{E}^{\hat{}}_{s,u}(t,\vec{q}^{\,12},\ell,A''A',\bar{B}''\bar{B}')$ in der $\ell$-Ebene voraussetzen, z.B., daß sie in dem Streifen $-\frac{1}{2} < Re\,\ell < L$ nur endlich viele Pole besitzen sollen. Schließlich setzen wir noch die so erhaltene Sommerfeld-Watson-Formel wieder von dem unphysikalischen Wert der Massenquadrate $\hat{s}(t)$ (5,21) zu dem physikalischen $s = \mu'^2 + \mu''^2$ fort, bei festgehaltenem $s$ und $t$ (vgl. spinlosen Fall) und integrieren danach (6,31) (N+L) mal:

$$b^{(t)}(j\mathcal{J},st) = \chi^{(t)}(j\vartheta,PQq)^{\alpha}(\omega|A'A''\bar{B}'\bar{B}'')\, d^{\sigma'}_{\bar{B}'\bar{B}'}(z_s)\, d^{\sigma''}_{\bar{B}''\bar{B}''}(z_s)\,\frac{1}{2i} \qquad (6,33)$$

$$\cdot\Big\{ \int_{-\frac{1}{2}-i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell\,(2\ell+1)\,\frac{\pi}{2i\sin\pi(\ell-A'+A'')}\Big(\hat{E}_s(t,\ell,A'A''\bar{B}'\bar{B}'')\, d^{\ell}_{A'+A'',\bar{B}'+\bar{B}''}(z_s) + \hat{E}_u(t,\ell,A'A''\bar{B}'\bar{B}')\, d^{\ell}_{A'+A''-\bar{B}'-\bar{B}''}(z_s)\Big)$$

$$+ i\sum_{\ell=0,\frac{1}{2}}^{M-1}(2\ell+1)\Big(E_s(t,\ell,A'A''\bar{B}'\bar{B}'')\, d^{\ell}_{A'+A'',-\bar{B}'-\bar{B}''}(z_s) + E_u(t,\ell,A'A''\bar{B}'\bar{B}'')\, d^{\ell}_{A'+A'',+\bar{B}'+\bar{B}''}(z_s)\Big)$$

$$+ 2\pi i\sum_{Re\,\ell_i > -\frac{1}{2}}(2\ell_i+1)\,\frac{\pi}{2i\sin\pi(\ell_i-A'+A'')}\Big(Res\,\hat{E}_s(t,\ell,A'A''\bar{B}'\bar{B}'')\Big|_{\ell=\ell_i} d^{\ell_i}_{A'+A'',\bar{B}'+\bar{B}''}(-z_s)$$

$$+ Res\,\hat{E}_u(t,\ell,A'A''\bar{B}'\bar{B}'')\Big|_{\ell=\ell_i} d^{\ell_i}_{A'+A'',-\bar{B}'+\bar{B}''}(z_s)\Big)\Big\}$$

$$\text{mit}\quad E_s(t,\ell,A'A'',\bar{B}'\bar{B}'') = \frac{1}{2}\int_{(M+\mu)^2}^{\infty} ds'\, M(\mu''A''q''\bar{B}'',\mu'A'q'\bar{B}')\, d^{\ell}_{A'+A'',-\bar{B}'-\bar{B}''}(z_s)\,\frac{1}{\sqrt{q'^2}\sqrt{q''^2}} \qquad (6,34)$$

(6,33) stellt eine Entwicklung dar, sowohl nach unitären als auch nach nicht unitären Darstellungen der dreidimensionalen Lorentzgruppe $\mathcal{L}_3$. Das "Background-Integral" enthält nur die unitären Darstellungen der "continuous-series". Die diskreten unitären Darstellungen bei $\ell = 0, \frac{1}{2}, \cdots M-1$ $M = Min\,(|A'+A''|,|\bar{B}'+\bar{B}''|)$ liefern gerade die von GELLMANN et al [25] diskutierten "Nonsense" Zustände. Die Reggeterme in der letzten

Zeile kann man schließlich als Beiträge nicht unitärer Darstellungen der $L_3$ interpretieren, die bei der Entwicklung von nichtquadratintegrablen Funktionen notwendigerweise auftreten müssen.

Aus (6,30) geht unmittelbar hervor, daß die durch die orthogonalen Spinoren $X^{(\pm)}(j' \mathcal{J}, PQ\, q)^{\alpha}$ (vgl. (4,18)) eingeführten kinematischen Pole bei $z_s = \pm 1$ durch entsprechende "kinematische" Faktoren $(z_s^2-1)^{\frac{|\mathcal{J}|}{2}}$ der Darstellungsmatrizen $d^{\ell}_{A'+A'',\,\pm(B'+B'')}(\pm z_s)\, d^{\sigma''}_{B''B''}(z_s)\, d^{\sigma'}_{B'B'}(z_s)$ genau kompensiert werden. Für $t<0$ fest haben also die invarianten Amplituden $b^{(\pm)}(j \mathcal{J}, s, t)$ keine kinematischen Pole in $s$.

## 7. Kap. Kinematische Singularitäten in der t-Ebene

### a) Partialwellenanalyse im $s$-Kanal

Wir haben bisher nur die kinematischen Singularitäten in der $s$-Ebene für $t<0$ fest diskutiert. Wir wollen nun für festes $s>(M+\mu)^2$ die kinematischen Singularitäten in der t-Ebene untersuchen. Dazu scheint die Partialwellenanalyse für den $s$-Kanal besonders geeignet [25].
Im System II (4,19) nehmen die Clebsch-Gordan-Koeffizienten eine besonders einfache Form an:

$$\langle p'' s_3'' q'' \sigma_3'' | T | p' s_3' q' \sigma_3' \rangle_{II} = \sum_{j=M}^{\infty} (2j+1) \left(\frac{16p^2}{-r^2}\right)^{1/4} \left(\frac{16q^2}{-R^2}\right)^{1/4} \cdot C(s, j, \lambda'' \nu'' \lambda' \nu') \, d^{j}_{\lambda''+\nu'', \lambda'+\nu'}(z_t)\, d^{\sigma''}_{\nu'' \sigma_3''}(z_t)\, d^{s''}_{\lambda'' s_3''}(z_t)\, \delta_{\lambda' s_3'}\, \delta_{\nu' \sigma_3'} \tag{7,1}$$

mit $$z_t = \frac{r_3}{\sqrt{-r^2}} \frac{2t + s - (M''^2+\mu''^2+M'^2+\mu'^2) + \frac{1}{s}(M'^2-\mu'^2)(M''^2-\mu''^2)}{\left(s-2(M''^2+\mu''^2)+\frac{1}{s}(M''^2-\mu''^2)^2\right)^{1/2}\left(s-2(M'^2+\mu'^2)+\frac{1}{s}(M'^2-\mu'^2)^2\right)^{1/2}} \tag{7,2}$$

Die Darstellungsmatrizen erzeugen mit ihren kinematischen Faktoren

$$\left(\frac{1+z_t}{2}\right)^{\frac{1}{2}(s_3'+\sigma_3'+s_3''+\sigma_3'')} \qquad \left(\frac{1-z_t}{2}\right)^{\frac{1}{2}(s_3'+\sigma_3'-s_3''-\sigma_3'')} \tag{7,3}$$

Wurzelschnitte bei $z_t = \pm 1$.

Bevor wir diese weiter untersuchen, wollen wir etwas über die Konvergenz der Partialwellenentwicklung wissen. Im spinlosen Fall kann man bekanntlich mit Hilfe der Jost-Lehmann-Dyson-Darstellung [16] zeigen, daß die Entwicklung innerhalb der Lehmannellipse mit den Brennpunkten $z_t = \pm 1$ und der langen Halbachse:

$$z_t = z_0 = \frac{1}{\sqrt{R^2}\sqrt{R^2}} \left(2t_0 + s - (M'^2+\mu'^2+M''^2+\mu''^2) + \frac{1}{s}(M'^2-\mu'^2)(M''^2-\mu''^2)\right) \qquad (7,4)$$

$$t_0 = \mathrm{Min}\left((\mu+\mu'')^2, (M'+M'')^2\right)$$

konvergiert. Die Konvergenz ist mit dem folgenden Verhalten der Partialwellenamplituden für große $j$ äquivalent:

$$C(s,j) \sim z_0^{-j} \qquad \text{für} \quad j \to \infty \qquad (7,6)$$

Nehmen wir für die reduzierten Matrixelemente $C(s,j,\lambda''\nu''\lambda'\nu')$ ebenfalls ein solches Verhalten für $j \to \infty$ an, so sind die T-Matrixelemente (7,1) für festes $s > (M+\mu)^2$ analytisch in der Lehmannellipse bis auf zwei Verzweigungsschnitte bei $-\infty < z_t \leq -1$ und $1 \leq z_t < \infty$. Führen wir die kovariante Zerlegung (4,24) nach der Spinorbasis II (4,20) ein, so überzeuge man sich leicht, daß die invarianten Amplituden $B^{(\pm)}(s,z,st)$ keine Verzweigungspunkte und auch keine -Pole bei $z_t = \pm 1$ haben:

$$B^{(\pm)}(s,z,st) = X^{(\pm)}(s,z,R_r)^{\alpha}(\alpha\,|\,A'A''B'B'')$$

$$\cdot \sum_{j=M}^{\infty} (2j+1)\, F(s,j,\bar{A}''\bar{B}'',A'B')\, d^{j}_{\bar{A}''\bar{B}'',-A'-B'}(z_t)\, d^{s''}_{A''A''}(z_t)\, d^{\sigma''}_{\bar{B}''B''}(z_t) \qquad (7,7)$$

mit $$F(s,j,\bar{A}''\bar{B}'',A'B') = \left(\frac{16\mu^2}{-t}\right)^{1/4}\left(\frac{16\mu^2}{-R^2}\right)^{1/4} C(s,j,\lambda''\nu''\lambda'\nu')$$

$$D^{s''}_{\lambda''A''}\left(L^{-1}(R^{-1}(\vec{r})p'')\right) D^{\sigma''}_{\nu''B''}\left(L^{-1}(R^{-1}(\vec{r}))q''\right) D^{s'}_{\lambda'A'}\left(L(p');\sigma_z\right) D^{\sigma'}_{\nu'B'}\left(L(q');\sigma_z\right) \qquad (7,8)$$

In dem System II haben die Darstellungsmatrizen der Transformationen $L^{-1}(R^{-1}(\vec{r})p'')$, $L^{-1}(R^{-1}(\vec{r})q'')$, $L^{-1}(p')$, $L^{-1}(q')$ Diagonalform; außerdem hängen sie nicht von $z_t$ bzw. $t$ ab.

b) Die Umkopplungskoeffizienten der beiden kovarianten Entwicklungen (4,23) (2

Die invarianten Funktionen $b^{(\pm)}(j\mathcal{J}, s,t)$ und $B^{(\pm)}(j\mathcal{J}, s,t)$ der beiden kovarianten Entwicklungen (4,24) zeichnen sich also dadurch aus, daß die $b^{(\pm)}(j\mathcal{J}, s,t)$ zu festem $t<0$ keine kinematischen Singularitäten in $s$ bzw. $z_s$ haben, die $B^{(\pm)}(j\mathcal{J}, st)$ zu festem $s>(M+\mu)^2$ keine innerhalb der durch die Lehmannellipse beschriebene Bereich der $z_t$-bzw. t-Ebene. Nach (4,29) liegen aber zu festem $s$ alle kinematische Singularitäten in der $z_t$ bzw. t-Ebene bei $z_t = \pm 1$, so daß die $B^{(\pm)}(j\mathcal{J}, st)$ auch außerhalb der Lehmannellipse keine kinematischen Singularitäten haben. Da nun die Funktionen $b^{(\pm)}(j\mathcal{J}, st)$ höchstens noch kinematische Polstellen, keine Verzweigungspunkte in t haben können, gilt die obige Aussage nicht nur für festes $t<0$, sondern für alle festen t, an denen $b^{(\pm)}(j\mathcal{J}, st)$ keine kinematischen Pole in t hat.

Ebenso sind die Funktionen $B^{(\pm)}(j\mathcal{J}, st)$ zu jedem festen $s$, an denen $B^{(\pm)}(j\mathcal{J}, s,t)$ keinen kinematischen Pol in $s$ hat, frei von kinematischen Singularitäten in t.
Es ist nun naheliegend, die Umkopplungskoeffizienten zwischen diesen beiden Sätzen von invarianten Funktionen zu untersuchen:

$$b^{(\pm)}(j\mathcal{J}, st) = \sum_{j=0}^{\mathcal{J}} R^{(\pm+)}_{j,j}(\mathcal{J}, t)\, B^{(\pm)}(j\mathcal{J}, st) + \sum_{j=0}^{\mathcal{J}-1} R^{(\pm-)}_{j,j}(\mathcal{J}, s,t)\, B^{(-)}(j,\mathcal{J}, st) \tag{7,11}$$

$$R^{(\pm,\pm)}(\mathcal{J}, st) = X^{(\pm)}(j\mathcal{J}, PQq) \propto Y^{(\pm)}_{\ell}(j\mathcal{J}, n R_r) \tag{7,12}$$

wobei die Vektoren in einem beliebigen aber gemeinsamen System zu nehmen sind.
Nach dem bisher Gesagten können die Umkopplungskoeffizienten höchstens noch Polstellen haben und zwar bei $s=0$, $t=0$ und den Nullstellen der Determinante

$$d = \det(P\,Q\,q\,\omega) = -p^2 Q^2 q^2 (z_s^2 - 1) \tag{7,13}$$

Zur Untersuchung der Koeffizienten (7,12) an diesen möglichen Polstellen ist es zweckmäßig, in unser spezielles System I zu gehen, in dem für die Spinoren $X^{(\pm)}(\eta\mathfrak{z}, PQq)^{\alpha}$ die Gleichung (4,18) gilt.
Auf Grund des Kovarianzverhaltens der Spinoren $Y_{\alpha}^{(\pm)}(\eta\mathfrak{z}, p R r)_{I}$ wobei der Index I andeuten soll, daß die Vektoren $pRr$ in dem System I zu nehmen sind, gilt:

$$Y_{\alpha}^{(\pm)}(\eta\mathfrak{z}\, pRr)_{I} = D^{\mathfrak{z}}_{\alpha\beta}(\Lambda)\; Y_{\beta}^{(\pm)}(\eta\mathfrak{z}, pRr)_{II} \tag{7,14}$$

Hierbei ist $\Lambda = \Lambda_{I \leftarrow II}$ die Lorentztransformation, die das System II in das System I überführt. Für die Spinoren $Y_{\beta}^{(\pm)}(\eta\mathfrak{z}, pRr)_{II}$ gilt dann die Darstellung (4,20).
Aus den Gleichungen:

$$P = P_{I} \qquad Q = Q_{I} \qquad q = q_{I} \tag{7,15}$$

$$p = p_{I} = \Lambda p_{II} = Q + q + \frac{1}{2}\,\frac{M'^{2} - M''^{2} + \mu''^{2} - \mu'^{2}}{P^{2}}\,P \tag{7,16}$$

$$R = R_{I} = \Lambda R_{II} = \frac{1}{2}\left(P + Q - q + \frac{1}{2}\,\frac{M'^{2} - M''^{2} - \mu''^{2} + \mu'^{2}}{P^{2}}\,P - \frac{M''^{2} - \mu''^{2}}{p^{2}}\,p\right)$$

$$r = r_{I} = \Lambda r_{II} = \frac{1}{2}\left(-P + Q - q + \frac{1}{2}\,\frac{M'^{2} - M''^{2} - \mu''^{2} + \mu'^{2}}{P^{2}}\,P - \frac{M''^{2} - \mu''^{2}}{p^{2}}\,p\right)$$

läßt sich $\Lambda$ bestimmen. Es gilt die Zerlegung

$$\Lambda = L_{01}\, L_{03}\, R_{13} \tag{7,17}$$

Dabei sollen die $L_{\mu\nu}$ und $R_{\mu\nu}$ ebene Transformationen in der $\mu\nu$-Ebene sein. Damit nun $p = \Lambda p_{II}$ ist, muß

$$L_{03}\, p_{II} = \tilde{p} \qquad \tilde{p}_{3} = p_{3} \qquad D^{\mathfrak{z}}_{\alpha\beta}(L_{03}) = \delta_{\alpha\beta}\left(\frac{\sqrt{p_{0}^{2} - p_{1}^{2}} + p_{3}}{\sqrt{\mu^{2}}}\right)^{\alpha} \tag{7,18}$$

und $L_{01}\,\tilde{p} = p \qquad D^{\mathfrak{z}}_{\alpha\beta}(L_{01}) = d^{\mathfrak{z}}_{\alpha\beta}(z_{1}) \qquad z_{1} = \dfrac{p_{0}}{\sqrt{p_{0}^{2} - \mu^{2}}}$ (7,19)

sein. $R_{13}$ bestimmt sich am einfachsten aus der inversen Transformation $\Lambda^{-1} = R_{13}^{-1} \; L_{03}^{-1} \; L_{01}^{-1}$ , die das System I in das System II überführt.

Insbesondere ist

$$P_{II} = \Lambda^{-1} P = R_{II} - r_{II} + \frac{1}{2} \frac{M'^2 - M''^2 - \mu'^2 + \mu''^2}{p^2} p_{II} \tag{7,20}$$

$$\mathcal{D}^{J}_{\alpha\beta}(L_{03}^{-1}) = \delta_{\alpha\beta} \left( \frac{\sqrt{P_{II1}^2 + P_{II3}^2} - P_{II0}}{2\sqrt{-p^2}} \right)^{\alpha} \tag{7,21}$$

und $$\mathcal{D}^{J}_{\alpha\beta}(R_{13}^{-1}) = d^{J}_{\alpha\beta}(z_3) \qquad z_3 = \frac{P_3}{\sqrt{P_{II1}^2 + P_{II3}^2}} \tag{7,22}$$

Wenn alle Massen verschieden sind, können Nullstellen der Determinante (7,22) in der $s$ und $t$ Ebene nur auftreten für $z_3^2 = 1$. Ist jedoch $M' = M''$ $\mu' = \mu''$ , so liefert auch der Faktor $P^2$ eine Nullstelle bei $t = 0$ für alle $s$ .

Man rechnet leicht nach, daß

$$\det(\mu R \; r \nu) = \det(P Q \; q \omega) = \mu^2 R^2 r^2 (1 - z_t^2) \tag{7,23}$$

ist. Hier gilt jetzt dieselbe Argumentation wie oben. Nullstellen treten nur auf für $z_t^2 = 1$ , falls alle Massen verschieden sind. Ist $M' = \mu'$ $M'' = \mu''$ so liefert auch der Faktor $p^2$ eine Nullstelle bei $s = 0$ für alle $t$.

Falls also $M' \neq \mu'$ oder $M'' \neq \mu''$ ist, gilt:

$$\lim_{z_s^2 \to 1} (1 - z_t^2) = 0 \tag{7,24}$$

$$\lim_{z_s^2 \to 1} (z_1^2 - 1) = \lim_{z_s^2 \to 1} \frac{q^2 (z_s^2 - 1)}{Q^2 + q^2 + 2\sqrt{q^2}\sqrt{Q^2} z_s} = 0 \tag{7,25}$$

$$\lim_{z_s^2 \to 1} (1 - z_3^2) = \lim_{z_t^2 \to 1} \frac{-r^2 (1 - z_t^2)}{-R^2 - r^2 - 2\sqrt{R^2}\sqrt{r^2} z_t} = 0 \quad \text{für } M' \neq M'' \text{ oder } \mu' \neq \mu'' \tag{7,26}$$

Für $M' = M''$ $\mu' = \mu''$ ist $\lim_{z_s^2 \to 1} z_t = 1$ $\lim_{t \to 0} z_t = -1$ $r^2 = R^2$

also $\lim_{z_s^2 \to 1} (1 - z_3^2) = \lim_{z_t \to 1} \frac{1 - z_t}{2} = 0$

Setzen wir die expliziten Formeln für die Spinoren (4,18) [illegible] (7,12) ein:

$$R_{ji}^{(++)}(\mathfrak{z},s,t) = X^{(+)}(j\mathfrak{z},PQq)^{\alpha}\, \mathfrak{D}^{\mathfrak{z}}_{\alpha\beta}(L_{01}L_{03}R_{13})\, Y^{(+)}_{\beta}(j\mathfrak{z},pR_r)$$

$$= \sqrt{-p^2}^{-\mathfrak{z}}\sqrt{q^2}^{-j}\sqrt{Q^2}^{-\mathfrak{z}+j}\sum_{|\alpha|=j}^{\mathfrak{z}}\sum_{\beta=-\mathfrak{z}}^{\mathfrak{z}}\sum_{k=-i}^{i}(z_s^2-1)^{-\frac{|\alpha|}{2}}\,p(|\alpha|-j;z_s)\,d^{\mathfrak{z}}_{\alpha\beta}(z_1)\cdot \qquad (7,27)$$

$$\cdot\left(\frac{\sqrt{k_0^2k_1^2}-k_3}{\sqrt{k^2}}\right)^{\beta} d^{\mathfrak{z}}_{\beta\gamma}(z_3)\sqrt{k^2}^{\mathfrak{z}}\sqrt{-R^2}^{\mathfrak{z}-i}\sqrt{-r^2}^{\,i}(\mathfrak{z}\gamma|i\gamma,\mathfrak{z}-i\phi)\,d^{i}_{\gamma 0}(z_t)$$

so findet man mit (7,24) bis (7,26)

$$\lim_{z_j^2\to 1} R_{ji}^{(++)}(\mathfrak{z},s,t) < \infty$$

Falls $M'=\mu'$ und $M''=\mu''$ ist

$$\lim_{z_s\to -1}(1-z_t^2) \qquad \lim_{z_s\to +1} s = 0$$

und die ganze obige Argumentation gilt nur noch für $z_s=-1$, nicht mehr für $z_s\to +1$, d.h. $s\to 0$. $R_{ij}(s,t)$ kann also nur noch Pole bei $s=0$ und $t=0$ haben.

$$\lim_{s\to 0} z_s^2 \begin{cases} +1 & \text{für } M'\neq\mu' \text{ oder } M''\neq\mu'' \\ =1 & \text{für } M'=\mu' \quad M''=\mu'' \end{cases} \qquad (7,28)$$

$$\lim_{s\to 0} z_1^2 \begin{cases} \neq 1 & \text{für } M'\neq\mu' \text{ oder } M''\neq\mu'' \\ =0 & \text{für } M'=\mu' \quad M''=\mu'' \end{cases} \qquad (7,29)$$

$$\lim_{s\to 0}\frac{\sqrt{k_0^2-k_3^2}-k_3}{\sqrt{k^2}} \begin{cases} \sim \lim_{s\to 0}\frac{1}{\sqrt{s}} & \text{für } M'^2-\mu'^2+\mu''^2-M''^2\neq 0 \\ =1 & \text{für } M'^2-\mu'^2+\mu''^2-M''^2=0 \end{cases} \qquad (7,30)$$

$$\lim_{s\to 0} z_t^2 \begin{cases} =1 & \text{für } M'\neq\mu' \text{ und } M''\neq\mu'' \\ =0 & \text{für } M'\neq\mu' \text{ oder } M''\neq\mu'' \\ \neq 1 & \text{für } M'=\mu' \text{ und } M''=\mu'' \end{cases} \qquad (7,31)$$

$$\lim_{s\to 0} z_3^2 \begin{cases} =1 & \text{für } M'\neq\mu' \text{ und } M''\neq\mu'' \\ =0 & \text{für } M''\neq\mu'' \quad M'=\mu' \\ =1 & \text{für } M''=\mu'' \quad M'\neq\mu' \\ \neq 1 & \text{für } M''=\mu'' \quad M'=\mu' \end{cases} \qquad (7,32)$$

Beachtet man diese Grenzübergänge in der expliziten Formel (7,27), so findet m
man:

$$\lim_{s\to 0} R_{ij}^{(++)}(\mathfrak{z},s,t) < \infty$$

In analoger Weise verfährt man bei der Untersuchung des Punktes $t=0$

$$\lim_{t\to 0} z_s^2 \begin{cases} =1 & \text{für } M'+M'' \text{ und } \mu'\neq\mu'' \\ =0 & \text{für } M'+M'' \text{ oder } \mu'\neq\mu'' \\ \neq 1 & \text{für } M'=M'' \quad \mu'=\mu'' \end{cases} \tag{7,33}$$

$$\lim_{t\to 0} z_t^2 \begin{cases} =1 & \text{für } M'+M'' \text{ und } \mu'\neq\mu'' \\ =1 & \text{für } M'+M'' \quad \mu'=\mu'' \\ =0 & \text{für } M'=M'' \quad \mu'\neq\mu'' \\ \neq 1 & \text{für } M'=M'' \quad \mu'=\mu'' \end{cases} \tag{7,34}$$

$$\lim_{t\to 0} \frac{\sqrt{n_0^2-n_1^2}-n_3}{\sqrt{n^2}} \begin{cases} \sim \lim_{t\to 0} \frac{1}{\sqrt{t}} & \text{für } M^2=M''^2-\mu'^2+\mu''^2\neq 0 \\ =1 & \text{für } M'^2=M''^2-\mu'^2+\mu''^2=0 \end{cases} \tag{7,35}$$

$$\lim_{t\to 0} z_t^2 \begin{cases} \neq 1 & \text{für } M'+M'' \text{ oder } \mu'\neq\mu'' \\ =1 & \text{für } M'=M'' \quad \mu'=\mu'' \end{cases} \tag{7,36}$$

$$\lim_{t\to 0} z_3^2 \begin{cases} \neq 1 & \text{für } M'\neq M'' \text{ oder } \mu'\neq\mu'' \\ 0 & \text{für } M'=M'' \quad \mu'=\mu'' \end{cases} \tag{7,37}$$

$$\lim_{t\to 0} R_{ij}^{(++)}(\mathfrak{z},s,t) \sim \lim_{t\to 0} \begin{cases} t^{-\mathfrak{z}} & \text{für } M'+M'' \ \mu'\neq\mu'' \\ t^{-\mathfrak{z}+\frac{\mathfrak{z}-j}{2}} & \mathfrak{z}-j \text{ gerade} \\ t^{-\mathfrak{z}+\frac{\mathfrak{z}-j+1}{2}} & \mathfrak{z}-j \text{ ungerade} \end{cases} \Big\} \text{für } M'\neq M'' \ \mu'=\mu''$$
$$\begin{cases} t^{-\mathfrak{z}+\frac{j}{2}} & j \text{ gerade} \\ t^{-\mathfrak{z}+\frac{j+1}{2}} & j \text{ ungerade} \end{cases} \Big\} \text{für } M=M'' \ \mu'\neq\mu''$$
$$\begin{cases} t^{-\frac{\mathfrak{z}}{2}} & \mathfrak{z} \text{ gerade} \\ t^{-\frac{\mathfrak{z}-1}{2}} & \mathfrak{z} \text{ ungerade} \end{cases} \Big\} \text{für } M'=M'', \ \mu'=\mu'' \tag{7,38}$$

Die invarianten Funktionen $b^{(\pm)}(\nu^2, st)$ sind also frei von kinematischen Singularitäten in $s$ und $t$ bis auf einen kinematischen Pol bei $t = 0$, der in (7, 38) angegebenen Ordnung, den man leicht durch Multiplikation mit einer geeigneten Potenz von $t$ wegnormieren kann. Ganz analog sieht man, daß die $B^{(\pm)}(\nu^2, st)$ nur einen kinematischen Pol bei $s = 0$ haben.

## 8. Kap. Paritätsinvarianz

Soll die T-Matrix paritätsinvariant sein

$$\pi T \pi^{-1} = T$$

wobei $\pi$ der unitäre Darstellungsoperator der räumlichen Spiegelung $\pi \vec{x} = -\vec{x}$ ist -, so ist es zweckmäßig, T-Matrixelemente zwischen Zuständen mit einem möglichst einfachen Paritätsverhalten zu betrachten. Die Vertauschungsrelationen [27]

$$\pi \vec{P} \pi = -\vec{P} \qquad \pi \vec{S} \pi = \vec{S} \qquad \text{(vgl. (1, 2))}, \quad \pi^2 = 1$$

zeigen unmittelbar, daß die Zustände

$$|M' s' \varepsilon' \ \pi' = \pm 1 ; \mu' s_3'\rangle = |M' s' \varepsilon' ; \mu' s_3'\rangle \pm \pi |M' s' \varepsilon', \pi \mu' s_3'\rangle \tag{8, 1}$$

sich unter den Darstellungsoperatoren der $\mathcal{L}_+^\uparrow$ ebenfalls nach der kanonischen Basis (1, 3) transformieren; außerdem haben sie das Paritätsverhalten:

$$\pi |M' s' \varepsilon' \ \pi' = \pm 1 ; \mu' s_3'\rangle = \pm |M' s' \varepsilon' \ \pi' = \pm 1 ; \pi \mu' s_3'\rangle \tag{8, 2}$$

In der Basis (8, 2) lautet also die Forderung der Paritätsinvarianz der T-Matrix:

$$\langle \mu'' s_3'', q'' \sigma_3'' | T | \mu' s_3' \ q' \sigma_3' \rangle = \pi \langle \pi \mu'' s_3'', \pi q'' \sigma_3'' | T | \pi \mu' s_3', \pi q' \sigma_3' \rangle \tag{8, 3}$$

wobei $\pi = \pm 1$ das Produkt der Eigenparitäten der ein- und auslaufenden Teilchen ist.

Welche Konsequenzen hat nun (8, 3) für die invarianten Amplituden der Zerlegungen (4, 24)? Offenbar wird ihre lineare Unabhängigkeit aufgehoben. Mit (4, 11) liefern (4, 24), (4, 3), (4, 2) und (8, 3) in unserm speziellen System I:

$$b^{(\pm)}(i\mathfrak{J}, st) = \pi\, X^{(\pm)}(i\mathfrak{J} PQq)^{\alpha} (\alpha | A'A'' B'B'') D^{s''}_{A''\bar{A}''}\left(\frac{n''_0+\vec{n}''\vec{\sigma}}{M''}\right) D^{\sigma''}_{B''\bar{B}''}\left(\frac{q''_0+\vec{q}''\vec{\sigma}}{\mu''}\right)$$

$$D^{s'}_{A'\bar{A}'}\left(\frac{n'_0-\vec{n}'\vec{\sigma}}{M'}\right) D^{\sigma'}_{B'\bar{B}'}\left(\frac{q'_0-\vec{q}'\vec{\sigma}}{\mu'}\right) (\bar{A}''\bar{A}'\bar{B}''\bar{B}'|\bar{\alpha})(-1)^{\bar{\mathfrak{J}}+\bar{\imath}}$$

$$\cdot\left\{\sum_{j=0}^{\bar{\mathfrak{J}}} b^{(+)}(i\bar{\mathfrak{J}}, st)\, Y^{(+)}_{\alpha}(j\bar{\mathfrak{J}}, PQq) - \sum_{j=0}^{\bar{\mathfrak{J}}-1} b^{(-)}(j\bar{\mathfrak{J}}, st)\, Y^{(-)}_{\alpha}(j\bar{\mathfrak{J}}, PQq)\right\} \quad (8,4)$$

Die Forderung der Paritätsinvarianz verkoppelt also in recht komplizierter Weise die invarianten Amplituden untereinander. Die weitere Diskussion von (8, 4) soll hier nur für den speziellen Fall

$$s' = s'' = s \qquad \sigma' = \sigma'' = 0 \qquad M' = M'' = M \qquad \mu' = \mu'' = \mu$$

durchgeführt werden, (8, 4) vereinfacht sich dann wesentlich [x]

$$b^{(\pm)}(i\bar{\mathfrak{J}}) = \pi\, X^{(\pm)}(i\bar{\mathfrak{J}})^{\alpha} \sum_{\mathfrak{J}=0}^{2s} C(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{J}})^{\alpha} \left(\sum_{i=0}^{\mathfrak{J}} b^{(+)}(i\mathfrak{J}) Y^{(+)}_{\alpha}(i\mathfrak{J}) - \sum_{i=0}^{\mathfrak{J}-1} b^{(-)}(i\mathfrak{J}) Y^{(-)}_{\alpha}(i\mathfrak{J})\right) \quad (8,5)$$

mit $$C(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{J}})^{\alpha} = \sum_{A'+A''=\alpha} (-1)^{\mathfrak{J}-\alpha} (\bar{\mathfrak{J}}\alpha | SA'SA'') \left(\frac{n_0+n_3}{M}\right)^{2A''} \left(\frac{n_0-n_3}{M}\right)^{2A'} (SA'\,SA''|\mathfrak{J}\alpha) \quad (8,6)$$

Es gilt $C(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{J}})^{\alpha} = C(\mathfrak{J}, \bar{\mathfrak{J}})^{-\alpha}$

so daß auf Grund der Symmetrieeigenschaften (4, 14) (4 12) der Spinoren $X^{(\pm)}(i\bar{\mathfrak{J}})^{\alpha}$ und $Y^{(\pm)}_{\alpha}(i\mathfrak{J})$ die Amplituden $b^{(+)}(i\mathfrak{J})$ und $b^{(-)}(i\mathfrak{J})$ nicht miteinander verkoppelt werden.

$$b^{(\pm)}(i\bar{\mathfrak{J}}) = \pm\pi \sum_{\mathfrak{J}=\bar{\imath}}^{2s} \sum_{i=\bar{\imath}}^{\mathfrak{J}(-1)} b^{(\pm)}(i\mathfrak{J})\, C^{(\pm)}(i\bar{\mathfrak{J}}, i\mathfrak{J}) \quad (8,7)$$

---

x) Die Abhängigkeit der invarianten Amplituden und der Kovarianten von kinematischen Variablen und Impulsen wird im folgenden zur Abkürzung nicht explizit hingeschrieben.

$\bar{\imath} = 0, \ldots, \bar{\jmath}(-1) \qquad \bar{\jmath} = 0, \ldots, 2s$

$$C^{(\pm)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, i'j') = 2 \sum_{\alpha=\bar{\imath}}^{j} X^{(\pm)}(\bar{\imath}\bar{\jmath})^{\alpha} C(\bar{\jmath}j)^{\alpha} Y_{\alpha}^{(\pm)}(i'j') \tag{8,8}$$

Man kann (8,7) als Eigenwertgleichung für die Matrix $C^{(\pm)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, i'j')$ auffassen, die nur die Eigenwerte $\pi = \pm 1$ haben kann. Die Lösung dieses Eigenwertproblems läßt sich sofort angeben. Die Funktionen [x]

$$\begin{aligned} a^{(+)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, \pm) &= \sum_{j=\bar{\imath}}^{2s} \sum_{i=\bar{\imath}}^{\bar{\jmath}} b^{(+)}(i'j') C^{(+)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, i'j') \pm b^{(+)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}) \\ a^{(-)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, \pm) &= \sum_{j=\bar{\imath}}^{2s} \sum_{i=\bar{\imath}}^{\bar{\jmath}-1} b^{(-)}(i'j') C^{(-)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, i'j') \mp b^{(-)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}) \end{aligned} \tag{8,9}$$

liefern ebenfalls einen vollständigen Satz von invarianten Amplituden [xx], nach dem ich die T-Matrixelemente entwickeln kann. Für eine solche Entwicklung lautet die Paritätsinvarianz der T-Matrix einfach

$$\begin{aligned} a^{(+)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, \pm) &= \pm \pi\, a^{(+)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, \pm) \\ a^{(-)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, \pm) &= \pm \pi\, a^{(-)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, \pm) \end{aligned} \tag{8,10}$$

Als Beispiel behandeln wir den Fall $s = \frac{1}{2}$ ( $\pi$ NStreuung). Ohne Paritätsinvarianz gilt für die Zerlegung der T-Matrixelemente nach invarianten Funktionen:

$$\langle p' s_3'' q'' | T | p' s_3' q' \rangle = D^{j_2}_{s_3 \lambda''}(L(p'')) \{ (\tfrac{1}{2}\lambda'' \tfrac{1}{2}\lambda' | 0,0)\, b^{(+)}(0,0) \tag{8,11}$$

$$+ (\tfrac{1}{2}\lambda'' \tfrac{1}{2}\lambda' | \alpha) [ b^{(+)}(0,1) Y_{\alpha}^{(+)}(0,1) + b^{(+)}(1,1) Y_{\alpha}^{(+)}(1,1) + b^{(-)}(0,1) Y_{\alpha}^{(-)}(0,1) ] \} D^{j_2}_{\lambda' s_3'}(i\sigma_2 L^{-1}(p'))$$

---

x) Bei der Definition dieser Amplituden sind unter Umständen geeignete Normierungsfaktoren anzubringen, die verhindern, daß durch die Koeffizienten $C^{(\pm)}(\bar{\imath}\bar{\jmath}, i'j')$ kinematische Singularitäten eingeführt werden.

xx) Offenbar kann nur die Hälfte dieser $2(2s+1)^2$ Amplituden linear unabhängig sein; an Hand von (8,7) und (8,8) ersieht man leicht, in welcher Weise Amplituden zum selben $\bar{\imath}$ ($\bar{\jmath} = \bar{\imath}, \ldots, 2s$) linear abhängig werden.

Bei Paritätsinvarianz - wobei das Produkt der Eigenparitäten der ein- und auslaufenden Zustände $\pi = 1$ zu setzen ist - liefert (8,7)

$$b^{(-)}(0,1) = 0$$

$$b^{(+)}(1,1)\,(2s+t-2(M^2+\mu^2)) - 2\,b^{(+)}(0,0) + b^{(+)}(0,1)\,(4M^2-t) = 0$$

Als linearunabhängige Amplituden wählen wir gemäß (8,9)

$$a^{(+)}(1,1,+) = b^{(+)}(1,1) = b \tag{8,12}$$

$$a^{(+)}(0,1,+) = b^{(+)}(1,1)\,t\,(2s+t-2(M^2+\mu^2)) + b^{(+)}(0,1)\,t\,(4M^2-t) + 2\,b^{(+)}(0,0)\,(4M^2-t) = a \tag{8,13}$$

Die Entwicklung nach diesen Amplituden lautet dann:

$$\langle \mu'' s_3'',\, q''\,|T|\,\mu' s_3'\, q'\rangle = \mathcal{D}^{1/2}_{s_3'' A''}(L(q''))\Big[\frac{1}{16M^2\sqrt{2}Q^2}\,(Q^2 + \vec{E}(P,Q)\,\vec{\sigma})\,a \tag{8,14}$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}}\Big\{(X + \vec{E}(P,Q)\,\vec{\sigma}) - \frac{X}{Q^2}\,(Q^2 + \vec{E}(P,q)\,\vec{\sigma})\Big\}\,b\Big]_{A''A'}\,\mathcal{D}^{1/2}_{A's_3'}(L^{-1}(q'))$$

mit $\quad X = 2s + t - 2(M^2+\mu^2)\,, \quad Q^2 = \frac{1}{4}(4M^2 - t)$

$$\vec{E}(P,Q) = P_0\,\vec{Q} - Q_0\,\vec{P} + i\,\vec{P}\times\vec{Q}$$

(8,14) läßt sich noch vereinfachen, wenn wir neue Amplituden einführen

$$b = \sqrt{2}\,\frac{B}{M} \qquad a = \sqrt{2}\,(16Q^2 A + X M B) \tag{8,15}$$

$$\langle \mu'' s_3''\; q''\,|T|\,\mu' s_3'\; q'\rangle = \mathcal{D}^{1/2}_{s_3'' A''}(L(q''))\Big[(Q^2 + \vec{E}(P,Q)\,\vec{\sigma})\,\frac{A}{M^2} \tag{8,16}$$

$$+ (X + \vec{E}(P,q)\,\vec{\sigma})\,\frac{B}{M}\Big]_{A''A'}\,\mathcal{D}^{1/2}_{A's_3'}(L^{-1}(q'))$$

Man überzeugt sich leicht, daß die Amplituden A, B identisch sind mit den invarianten Funktionen der bekannten Zerlegung des $\pi$ N Streumatrixelementes mit Hilfe von $\gamma$ -Matrizen:

$$\langle p'' s_3'' , q'' | T | p' s_3' , q' \rangle = \bar{u}(p'' s_3'') (A + \not{q} B) u(p' s_3') \tag{8,17}$$

In der Weylschen Darstellung der $\gamma$ -Matrizen

$$\gamma_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \qquad \vec{\gamma} = \begin{pmatrix} 0 & \vec{\sigma} \\ -\vec{\sigma} & 0 \end{pmatrix} \tag{8,18}$$

gilt für die Diracspinoren

$$\bar{u}(p'' s_3'') = \left( \mathfrak{D}^{1/2}_{s_3'' \dot{A}''} (L(p'')) \, , \, \mathfrak{D}^{1/2}_{s_3'' \dot{A}''} (L^{-1}(p'')) \right) \tag{8,19}$$

$$u(p' s_3') = \begin{pmatrix} \mathfrak{D}^{1/2}_{\dot{A}' s_3'} (L^{-1}(p')) \\ \mathfrak{D}^{1/2}_{A' s_3'} (L(p')) \end{pmatrix}$$

## 9. Kap. Die Racahkoeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe

Wie in der Einleitung angedeutet wurde, gibt es mehrere Möglichkeiten die vier Zustände $p' s_3'$ , $q' \sigma_3'$ , $p'' s_3''$ , $q'' \sigma_3''$ in dem Matrixelement $\langle p'' s_3'', q'' \sigma_3'' | T | p' s_3', q' \sigma_3' \rangle$ eines lorentzinvarianten Operators T zu einer Invarianten zusammenzukoppeln. Fassen wir jeweils die ein- und auslaufenden Zustände ( $p' s_3'$ und $q' \sigma_3'$ , $p'' s_3''$ , und $q'' \sigma_3''$ ) zusammen, so gelangen wir zur Partialwellenanalyse im $s$ -Kanal (7,1), nehmen wir dagegen jeweils einen ein- und auslaufenden Zustand ( $p' s_3'$ und $p'' s_3''$ , $q' \sigma_3'$ und $q'' \sigma_3''$ ) so gelangen wir zu einer Partialwellenanalyse im t-Kanal (vgl. (6,18))

$$\langle \lambda'' s_3'', q'' \sigma_3'' | T | \lambda' s_3' q' \sigma_3' \rangle_I =$$

$$= \int_{-\frac{1}{2}+i\infty}^{-\frac{1}{2}+i\infty} d\ell \; (2\ell+1) \; \cot \pi(\ell - \lambda' - \lambda'') \left(\frac{-16p^2}{Q^2}\right)^{1/4} \left(\frac{-16p^2}{q^2}\right)^{1/4} \cdot$$

$$A(t,\ell,\lambda''\lambda',\nu''\nu') \; d^{\ell}_{\lambda''+\lambda',\nu''+\nu'}(z_s) \; D^{\sigma'}_{\nu'\sigma_3'}(R^{-1}(q_I')) \cdot$$

$$\cdot D^{\sigma''}_{\nu''\sigma_3''}(R^{-1}(q_I'') i\sigma_2) \; \delta_{\lambda''s_3'} \; D^{s'}_{\lambda's_3'}(i\sigma_2) \qquad (9,1)$$

Während (7,1) mit den Impulsvektoren im System II berechnet wurde, nimmt (9,1) im System I eine besonders einfache Form an. Die Umkopplungskoeffizienten der reduzierten Matrixelemente $C(s,j,\lambda''\nu'',\lambda'\nu')$ und $A(t,\ell,\lambda''\lambda',\nu''\nu')$ definieren nun gerade die Racahkoeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe. Durch Inversion folgt aus (9,1) mit (7,1)

$$A(t,\ell\lambda''\lambda',\nu''\nu') \left(-\frac{16p^2}{q^2}\right)^{1/4} \left(-\frac{16p^2}{q^2}\right)^{1/4} = \int_1^{\infty} dz_s \sum_{j=M}^{\infty} (2j+1) \left(\frac{16r^2}{-r_2}\right)^{1/4} \left(\frac{16r^2}{-R_2}\right)^{1/4}$$

$$\cdot C(s,j,\lambda''\bar{\nu}'',\lambda'\bar{\nu}') \; d^{j}_{\lambda''+\bar{\nu}'',\lambda'+\bar{\nu}'}(z_t) \; D^{s''}_{\lambda''\lambda^*}\left(R^{-1}(\vec{r}) \, R^*(\Lambda^{-1} r_I'')\right) \cdot$$

$$\cdot D^{\sigma''}_{\bar{\nu}''\nu''}\left(R^{-1}(\vec{r}) R^*(\Lambda^{-1}, q_I'') i\sigma_2 R(q_I'')\right) \; D^{s'}_{\lambda'\lambda'}\left(R^{-1}(\Lambda^{-1}, r_I') (-i\sigma_2)\right) \qquad (9,2)$$

$$D^{\sigma'}_{\bar{\nu}'\nu'}\left(R(\Lambda^{-1} q_I') R(q_I')\right) d^{\ell}_{\lambda''+\nu'',\lambda'+\nu'}(z_s)$$

$$M = \mathrm{Max}\left(|\lambda''+\bar{\nu}''|, |\lambda'+\bar{\nu}'|\right)$$

In (9,2) sind $R(\Lambda^{-1}, r_{\pm}'')$, $R(\Lambda^{-1} q_{\pm}'')$, $R(\Lambda^{-1} r_{\pm}')$, $R(\Lambda^{-1} q_{\pm}')$ die Wignerdrehungen, die man zur Umrechnung der T-Matrixelemente vom System II auf das System I benötigt:

$$R(\Lambda^{-1}, p''_I) = L(p''_{II})\,\Lambda^{-1}\,L^{-1}(p''_I) \qquad p''_I = \Lambda\, p''_{II} \tag{9,3}$$

$R^{-1}(\vec{r}_{II})$ dreht den Vektor $\vec{r}_{II} = (r_1, 0, r_3)$, $z_t = \left(\frac{r_3}{|\vec{r}_2|}\right)_{II}$ in die Richtung der 3-Achse. Für die Drehungen $R(q''_I)$, $R(q'_I)$ gilt schließlich (3,6)

$$R(q''_I) = L(q''_I)\;\; L^{-1}(q_I)\;\; L^{-1}(L(q_I)\,q''_I) \tag{9,4}$$

Aus (9,2) ergibt sich nun als Definition für die Racahkoeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe:

$$\langle t\ell, \lambda''\lambda'\,\nu''\nu' | sj\;\lambda'\nu', \lambda''\nu''\rangle = (2j+1)\left(-\frac{16P^2}{Q^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(-\frac{16P^2}{q^2}\right)^{-\frac{1}{4}}\left(\frac{16\mu^2}{R^2}\right)^{\frac{1}{4}}\left(-\frac{16\mu^2}{r^2}\right)^{\frac{1}{4}},$$

$$\cdot\, d^{j}_{\lambda''+\nu'',\,\lambda'+\nu'}(z_t)\; D^{s''}_{\lambda''\lambda''}(R^{-1}(\vec{r})\,R^{*}(\Lambda^{-1}p''_{II}))\; D^{\sigma''}_{\nu''\nu''}(R^{-1}(\vec{r})\,R^{*}(\Lambda^{-1}, q''_I)\,i\sigma_2\,R(q''_I)) \tag{9,5}$$

$$\cdot D^{s'}_{\lambda'\lambda'}(R(\Lambda^{-1}, r'_I)(-i\sigma_2))\; D^{\sigma'}_{\nu'\nu'}(R(\Lambda^{-1}, q'_I)\,R(q'_I))\; d^{\ell}_{\lambda''+\nu'',\,\lambda'+\nu'}(z_s)$$

Mit (9,3) und (9,4) können wir die in (9,5) auftretenden Drehungen in der folgenden Weise zerlegen:

$$R^{-1}(\vec{r})\;R^{*}(\Lambda^{-1}, p''_{II}) = L^{-1}(R^{-1}(\vec{r}_{II})\,p''_{II})\,R^{-1}(\vec{r}_{II})\,\Lambda^{T}L(p''_{II}) \tag{9,6}$$

$$R^{-1}(\vec{r})\;R^{*}(\Lambda^{-1}, q''_I)(i\sigma_2)R(q''_I) = L^{-1}(R^{-1}(\vec{r}_{II})\,q''_{II})\,R^{-1}(\vec{r}_{II})\,\Lambda^{T}L(q_I)\,L(L(q_I)\,q''_I)\,i\sigma_2 \tag{9,7}$$

$$R(\Lambda^{-1}, p'_I)(-i\sigma_2) = L(p'_{II})(i\sigma_2)\,\Lambda^{T}L(p'_I) \tag{9,8}$$

$$R(\Lambda^{-1}, q'_I)\,R(q'_I) = L(q'_{II})(i\sigma_2)\,\Lambda^{T}L(q'_I)\,L(L(q_I)\,q'_I)(-i\sigma_2) \tag{9,9}$$

In (6,23) und (7,8) haben wir bereits gesehen, daß die reinen Lorentztransformationen:

$$L(p''_I),\;\; L(L(q'_I)\,q''_I),\;\; L(p'_I),\;\; L(L(q'_I)\,q'_I) \tag{9.10}$$

$$L^{-1}(R^{-1}(\vec{r}_{II})\,p''_{II}),\;\; L^{-1}(R^{-1}(\vec{r}_{II})\,q''_{II}),\;\; L(p'_{II}),\;\; L(q'_{II}) \tag{9.11}$$

alle diese Diagonalform haben; außerdem hängen die ersten vier (9,10) nur von t ab. Wir können sie analog zu (6,23) mit den reduzierten Matrixelementen $A(t,\ell,\lambda''\lambda',\nu''\nu')$ zu einer neuen Größe $\mathfrak{D}(t,\ell,A''A',B''B')$ zusammenfassen. Die letzten vier hängen nur von $S$ ab und werden gemäß (7,8) mit den reduzierten Matrixelementen $C(s,j,\bar\lambda''\bar\nu'',\bar\lambda'\bar\nu')$ zusammengefaßt. Die Umkopplungskoeffizienten dieser neuen Größen

$\mathfrak{D}(t,\ell,A''A''B''B')$ und $F(s,j,\bar A''\bar B'',\bar A'\bar B')$

sind dann:

$$\{t\ell,A''A',B''B'\,|\,sj,\bar A''\bar B''\,\bar A'\bar B'\} = (2j+1)\; d^{\ell}_{A''+A',\,-B''-B'}(z_s)\cdot$$

$$\cdot\, \mathfrak{D}^{s''}_{A''\bar A''}(\lambda R^{-1}(\vec r_2))\; \mathfrak{D}^{\sigma''}_{B''\bar B''}(L(q_2)\,\lambda\, R^{-1}(\vec r_2))\; \mathfrak{D}^{s'}_{A'\bar A'}(\lambda)\; \mathfrak{D}^{\sigma'}_{B'\bar B'}(L(q_2)\,\lambda) \cdot \tag{9,12}$$

$$\cdot\, d^{j}_{\bar A''+\bar B'',\,-\bar A'-\bar B'}(z_t)$$

Sind die Spins der äußeren Teilchen gleich Null, so vereinfacht sich (9,5) und entsprechend (9,12):

$$\langle t,\ell|\,sj\rangle = (2j+1)\left(-\frac{16P^2}{Q^2}\right)^{-\frac14}\left(-\frac{16P^2}{q^2}\right)^{-\frac14}\left(-\frac{16k^2}{R^2}\right)^{\frac14}\left(-\frac{16k^2}{r^2}\right)^{\frac14}\cdot \tag{9,13}$$

$$\cdot\, P_\ell(z_s)\cdot P_j(z_t)$$

Der Fall $s'=s''=\frac12$, $\sigma'=\sigma''=0$ wird noch im folgenden Kapitel diskutiert werden.

## 10. Kap. Crossingrelationen für die Partialwellenamplituden des $s-, u-$ und t-Kanals [28].

### a) Analytische Fortsetzung der Partialwellenamplituden des t Kanals.

Eine zum Kap. 9 ganz analoge Betrachtung verschafft uns auch die Umkopplungskoeffizienten zwischen den Partialwellenamplituden $\hat{E}_s(t,l,A'A'',B'B'')$ (6,34) der Sommerfeld-Watson-Formel (6,33) einerseits und den Sprungfunktionen $F(s+i0,j,\bar{A}''\bar{B}''\bar{A}'\bar{B}') - F(s-i0,j,\bar{A}''\bar{B}'',\bar{A}'\bar{B}')$ am rechten Schnitt $s>s_0>0$ der Partialwellenamplituden des $s$-Kanals (7,8) andererseits:

$$\hat{E}_s(t,l,A'A'B''B') = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{\infty}\frac{ds}{\sqrt{q^2}\sqrt{Q^2}}\sum_{j=M}^{\infty}(2j+1)\,e^{l}_{A'+A'',-B'-B''}(z_s)\cdot$$

$$\cdot D^{s'}_{A''\bar{A}''}(\Lambda R^{-1}(\vec{r}_{II}))\,D^{\sigma''}_{B''\bar{B}''}(L(q_I)\Lambda R^{-1}(\vec{r}_{II}))\,D^{s'}_{A'\bar{A}'}(\Lambda)\,D^{\sigma'}_{B'\bar{B}'}(L(q_I)\Lambda)\cdot \qquad (10,1)$$

$$\cdot d^{j}_{\bar{A}''+\bar{B}'',-\bar{A}'-\bar{B}'}(z_t)\left\{F(s+i0,j,\bar{A}''\bar{B}''\bar{A}'\bar{B}') - F(s-i0,j,\bar{A}''\bar{B}''\bar{A}'\bar{B}')\right\}$$

Man erhält diese Umkopplungskoeffizienten also einfach indem man in (9,12) die Funktionen $d^{l}_{A'+A'',-B'-B''}(z_s)$ durch die entsprechenden Funktionen zweiter Art $e^{l}_{A'+A'',-B'-B''}(z_s)$ ersetzt. In (10,1) sei die unterste Schwelle $s_0$ jetzt so gewählt, daß auch die möglichen Einteilchen-Zwischenzustände mit erfaßt werden.

Um zu Crossingrelationen für die Partialwellenamplituden des $s-, u-$ und t-Kanals zu gelangen, müssen wir noch einen Zusammenhang zwischen den Funktionen $\hat{E}_{s,u}(t,l,A'A''B'B'')$ und den Partialwellenamplituden des t-Kanals $G(t,l,A'A''B'B'')$ (vgl. (10,7) und (10,8) herstellen. Zunächst gilt es, die Funktionen $\hat{E}_{s,u}(tl,A''A'B''B')$ von den Werten $t<0$, $l=-\frac{1}{2}+ip$, $l=0,\dots,M-1$ analytisch fortzusetzen, zu den physikalischen Werten des t-Kanals $t>\mathrm{Min}\,((M'+M'')^2,(\mu'+\mu'')^2)$, $l=M,M+1,\dots$ Wann ist dies überhaupt möglich?

Entwickeln wir in (6,34) die Matrixelemente $M(\mu''A'',q''B'',n'A',q'B')$ mit Hilfe der Spinoren (4,10) nach den Spektralfunktionen $\beta^{(\pm)}(j,s,t)$ der Dispersionsrelationen für die invarianten Amplituden $b^{(\pm)}(j,s,t)$

$$\hat{E}_s(t,\ell,A''A'B''B') = \frac{1}{2}\int_{s_0}^{\infty}\frac{ds'}{\sqrt{\lambda^2}\sqrt{Q^2}}\, e^{\ell}_{A'+A'',-B'-B''}(z_s)\, d^{\sigma'}_{B'\bar{B}'}(z_s)\, d^{\sigma''}_{B''\bar{B}''}(z_s).$$

$$(A''A'B''B'|\alpha)\left\{\sum_{j=0}^{J} \beta^{(+)}(jJ,st)\, Y^{(+)}_{\alpha}(jJ,PQq) + \sum_{j=0}^{J-1}\beta^{(-)}(jJ,st)\, Y^{(-)}_{\alpha}(jJ,PQq)\right\} \qquad (10,2)$$

so liefert der explizit bekannte Teil des Integranden in (10,2)

$$\frac{1}{\sqrt{\lambda^2}}\frac{1}{\sqrt{Q^2}}\, d^{\sigma'}_{B'\bar{B}'}(z_s)\, d^{\sigma''}_{B''\bar{B}''}(z_s)\, e^{\ell}_{A'+A'',-B'-B''}(z_s)\, Y^{(\pm)}_{\alpha}(jJ,PQq) \qquad (10,3)$$

bei Beachtung von (4,26), (4,27) und (4,28) nur Schnitte

für $q^2 \geq 0 \qquad Q^2 \geq 0 \qquad -\infty < z_s \leq 1$ (10,4)

Die ersten beiden erzeugen in der t-Ebene zwei Schnitte bei

$$(\mu'-\mu'')^2 \leq t \leq (M'-M'')^2 \qquad \text{und} \qquad (\mu'+\mu'')^2 \leq t \leq (M'+M'')^2$$

falls wir annehman daß

$$(\mu'-\mu'')^2 \leq (M'-M'')^2 \leq (\mu'+\mu'')^2 \leq (M'+M'')^2$$

Der Strahl $-\infty < z_s < 1$ wird im allgemeinen auf mehrere Geradenstücke auf der reellen t-Achse abgebildet, deren Lage von der Schwelle $s_0$ und den Verhältnissen der äußeren Massen zueinander abhängen.
Nehmen wir etwa den Fall

$$2s_0 > M'^2+M''^2+\mu'^2+\mu''^2 \qquad M''^2 \geq M'^2 > 0 \qquad \mu'^2-\mu''^2 > 0 \quad \text{x)}$$

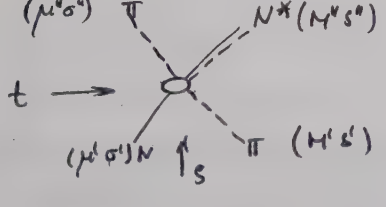
so kann man sich leicht überzeugen, daß die Lücke

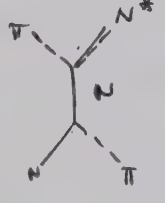
$$(M''-M')^2 < t < (\mu'+\mu'')^2 \qquad (10,5)$$

auf der reellen t-Achse frei von Schnitten bleibt.

---

x) Dieser Fall liegt z.B. vor bei dem folgenden Streuprozeß




falls wir die Einteilchen-Singularität ausschließen. Diese liefert einen Schnitt, der die Lücke (10,5) verkleinert, aber nicht ganz schließt.

Wir können also die Funktionen $\hat{E}_s(t,\ell,A''A'B''B')$ von $t=\tau-i0$, $\tau<0$ nach $t=\tau+i0$ $\tau>\text{Min}((M'+M'')^2,(\mu'+\mu'')^2)$ fortsetzen, sofern nur die Spektralfunktionen $\rho^{(\pm)}(j^P,s,t)$ sich auf demselben Wege bei festem $s>s_0$ analytisch fortsetzen lassen. Hinreichend hierfür ist die Gültigkeit der Mandelstamdarstellung für die invarianten Amplituden
Weiterhin haben wir bereits in (6,33) vorausgesetzt, daß $\hat{E}_s(t,\ell,A''A'B''B')$ analytisch ist in $\ell$ für $\text{Re}\,\ell>-\frac{1}{2}$ bis auf endlich viele Reggepole.
Wählen wir in (6,33) $s$ so, daß $z_s$ innerhalb der Lehmannellipse mit den Brennpunkten $z_s=\pm1$ und der großen Halbachse

$$z_0=\frac{1}{4q'q''}\left(2s_0+t-(M'^2+M''^2+\mu'^2+\mu''^2)+\frac{1}{t}(M''^2-M'^2)(\mu''^2-\mu'^2)\right) \qquad (10,6)$$

liegt, so können wir den $\ell$-Integrationsweg in (6,33) auf die reelle Achse $\ell\geq M$ zusmmenziehen, so daß schließlich nur noch die Residuen zu den Polstellen des Integranden bei $\ell=M,M+1,\dots$ beitragen. Die Summe der Residuen ist dann nichts anderes als die Partialwellenentwicklung der invarianten Amplituden im physikalischen Bereich des t-Kanals und zwar geschrieben im Schwerpunktsystem des t-Kanals:

$$P=p'-p''=(p'_0-p''_0,\vec{0}),\quad Q=(0,0,0,Q_3),\quad q=(0,q_1,0,q_3)$$

$$b^{(\pm)}(j^P,st)=X^{(\pm)}(j^P,PQq)^{\alpha}\,(\alpha|A''A'B''B'). \qquad (10,7)$$

$$\cdot\sum_{\ell=M}^{\infty}(2\ell+1)\,G(t,\ell,A''A'B''B')\,d^{\ell}_{A'+A'',-\bar{B}'-\bar{B}''}(z_s)\,d^{\sigma'}_{B'B'}(z_s)\,d^{\sigma''}_{B''B''}(z_s)$$

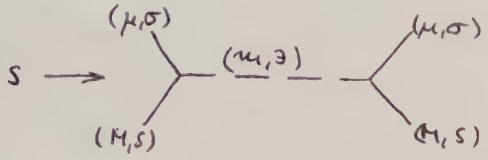
mit

$$G(t,\ell,A''A',B''B')=\hat{E}_s(t,\ell,A''A'B''B')+(-1)^{\ell-A'-A''}\hat{E}_u(t,\ell,A''A',B''B') \qquad (10,8)$$

Zusammen mit (10,1) und einer zu (10,1) analogen Formel für $\hat{E}_u(t,\ell,A''A',B''B')$ liefert (10,8) die allgemeine Lösung für ein Problem, daß bei allen N/D und Bootstraprechnungen auftritt: "Wie berechne ich aus den "rechten" Schnitten der Partialwellenamplituden des s- und u-Kanals, den linken Schnitt der Partialwellenamplitude des t-Kanals?"

b) Beispiele:

Zunächst berechnen wir den Beitrag eines Ein-Teilchen-Austausch Graphen zu dem "linken" Schnitt von $\hat{E}_s(t, \ell, A''A', B'B')$. Das ausgetauschte Teilchen habe die Masse $m$ und den Spin $\mathfrak{z}$. Dieser Austauschgraph trägt dann nur zur $\mathfrak{z}$-ten Partialwelle im $S$-Kanal bei:




$$F(s+i0, \mathfrak{z}, \bar{A}''\bar{B}'' A'B') - F(s-i0, \mathfrak{z}, \bar{A}''\bar{B}'', A\bar{B}') =$$

$$= 2\pi i \; \delta(s-m^2) \; \tilde{F}(m^2, \mathfrak{z}, \bar{A}''\bar{B}'', A'B') \qquad (10,9)$$

$$\hat{E}_s(t, \ell, A''A' B''B') = 2\pi i \cdot \frac{1}{\sqrt{4\mu^2 - t}} \frac{1}{\sqrt{4M^2 - t}} (2\mathfrak{z}+1) \; e^{\ell}_{A'+A'', -B-B''}(z_s) \cdot$$

$$\cdot d^{s}_{A'A'}(z_1, z_3) \; d^{s}_{A''A''}(z_1, z_3, z_t) \; d^{\sigma}_{B'B'}(z_s, z_1, z_3) \; d^{\sigma}_{B''\bar{B}''}(z_s, z_1, z_3, z_t) \qquad (10,10)$$

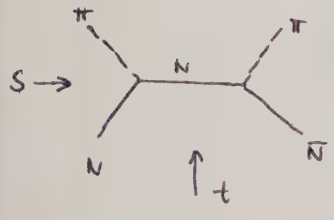
$$d^{\mathfrak{z}}_{\bar{A}'B'', -A'-B'}(z_t) \; \tilde{F}(m^2, \bar{A}''\bar{B}'', A'B')$$

mit $$z_t = -1 + \frac{2t}{2(M^2+\mu^2) - m^2 - \frac{1}{m^2}(M^2-\mu^2)^2} \qquad z_s = \frac{2m^2 + t - 2(M^2+\mu^2)}{\sqrt{4M^2 - t}\;\sqrt{4\mu^2 - t}} \qquad (10,11)$$

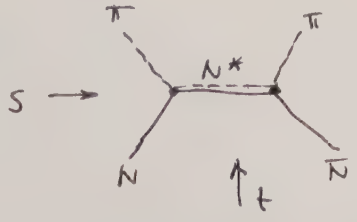
$$z_3 = \sqrt{\frac{1-z_t}{2}} \qquad z_1 = \frac{m^2 + M^2 - \mu^2}{\sqrt{4M^2 - t}\; m} \qquad (10,12)$$

$$d^{s}_{A'A'}(z_1, z_3) = \sum_{\bar{A}=-s}^{s} d^{s}_{A'\bar{A}}(z_1) \; d^{s}_{\bar{A}A'}(z_3) \qquad (10,13)$$

Eine konkrete Anwendung finden (10, 8) und (10, 10) bei der Berechnung der Partialwellenamplituden des Prozesses: $N + \bar{N} \longrightarrow \pi + \pi$
Welchen Beitrag liefern z.B. die Austauschgraphen?




a)




b)

(10, 14)

Bei Berücksichtigung der Crossingsymmetrie folgt aus (10, 8) und (10, 9):

$$G^{(J)}(t,\ell,\lambda'\lambda') = 2\pi i \frac{4}{\sqrt{4M^2-t}\sqrt{4\mu^2-t}} \left(1+(-1)^{\ell-\lambda'-\lambda''}\right) e^{\ell}_{1,0}(z_s) \cdot \tag{10,15}$$

$$\cdot d^{1/2}_{\lambda'\bar{\lambda}'}(z_1,z_3)\, d^{1/2}_{\lambda''\bar{\lambda}''}(z_1,z_3,z_t)\, d^{J}_{\bar{\lambda}'',-\bar{\lambda}'}(z_t)\, \tilde{F}(u^2,J,\bar{\lambda}'',\bar{\lambda}') \quad ; J=\tfrac{1}{2},\tfrac{3}{2}$$

Bevor wir (10, 15) weiter ausrechnen, wollen wir den Zusammenhang dieser Partialwellenamplituden mit denen der invarianten Funktionen A, B (8, 15) angeben. Aus (8, 15), (8, 12), (8, 13) und (10, 7) ersieht man:

$$B = M \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{2\ell+1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[G\left(t,\ell,\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\right) + G\left(t,\ell,-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\right] \frac{1}{\sqrt{t-4M^2}} \frac{1}{\sqrt{t}} P'_{\ell}(z_s) \tag{10,16}$$

$$A = \frac{1}{8(t-4M^2)} \sum_{\ell=0}^{\infty} (2\ell+1)\left[G\left(t,\ell\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right) - G\left(t,\ell-\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\right)\right] P_{\ell}(z_s) \tag{10,17}$$

$$-\frac{M^2}{4\sqrt{t-4M^2}\sqrt{t}} \sum_{\ell=1}^{\infty} \frac{(2\ell+1)}{\sqrt{\ell(\ell+1)}} \left[G\left(t,\ell,\tfrac{1}{2}\tfrac{1}{2}\right) + G\left(t,\ell-\tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}\right)\right] P'_{\ell}(z_s)$$

In (10, 15) läßt sich $\tilde{F}(u^2,J,\lambda''\lambda')$ $J=\frac{1}{2},\frac{3}{2}$ aus dem Beitrag des Graphen (10, 14a) bzw. (10, 14b) zur Streuamplitude bestimmen. Im System II gilt für diesen:

$$\frac{g_J^2}{s-m^2}\,(J\,s_2'\,|\,1\,l_3\;\tfrac{1}{2}\,s_3'')\;d^{1}_{0\,l_3}(z_t)^{x)} = \tag{10,18}$$

$$= 4\,\frac{1}{s\,m^2}\,D^{1/2}_{\lambda''\,\Lambda''}\,(L(k'(\vec{r})\,n'')\;\tilde{F}(m^2, J, \Lambda'', \Lambda')\,D^{1/2}_{\Lambda'\,\lambda'}(i\sigma_2 L'(n'))\cdot$$

$$\cdot\, d^{J}_{\lambda''\lambda'}(z_t)\;d^{1/2}_{\lambda''\,s_3''}(z_t)\;\delta_{\lambda' s_3'} \qquad J = \tfrac{1}{2},\ \tfrac{3}{2}$$

$$\tilde{F}(m^2, J, \Lambda''\Lambda') = \frac{1}{4}\;g_J^2\,(-1)^{1/2+\Lambda''}\;\frac{1}{(J\Lambda''|10\,\frac{1}{2}\Lambda'')}\left(\frac{\sqrt{M^2-R^2}+\sqrt{-R^2}}{M}\right)^{\Lambda'+\Lambda''} \tag{10,19}$$

mit $$R^2 = \frac{1}{4}\left(2(M^2+\mu^2) - m^2 - \frac{1}{m^2}(M^2-\mu^2)^2\right) \tag{10,20}$$

Die Ausrechnung von (10,15) liefert für den Beitrag des Graphen a)

$$G^{1/2}(t, l, \tfrac{1}{2}-\tfrac{1}{2}) - G^{1/2}(t, l, -\tfrac{1}{2}, \tfrac{1}{2}) = -2\pi i\sqrt{3}\;\frac{g^2_{1/2}}{\sqrt{(4M^2-t)(4\mu^2-t)}}\;\frac{\sqrt{-R^2}}{M}\,(1+(-1)^l)\,Q_l(z_s)\,(1-z_t) \tag{10,21}$$

$$G^{1/2}(t, l, \tfrac{1}{2}\;\tfrac{1}{2}) + G^{1/2}(t, l, -\tfrac{1}{2}\;-\tfrac{1}{2}) = 2\pi i\sqrt{3}\;\frac{g^2_{1/2}}{2\sqrt{4M^2-t}}\,(1-(-1)^l)\,\frac{1}{\sqrt{l(l+1)}}\,(z_s^2-1)\,Q_l'(z_s)\cdot$$

$$\cdot\left(\left(1-\frac{\mu^2}{2M^2}\right)\frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{-R^2}} + \sqrt{1-\frac{R^2}{M^2}}\right)\sqrt{\frac{1-z_t}{2}} \tag{10,22}$$

---

x) In einer Partialwellenentwicklung im $s$-Kanal mit $L\,S$-Kopplung trägt der Graph (10,14) genau zu einem reduzierten Matrixelement bei, das durch den Gesamtspin $J = \frac{3}{2}$ und dem Bahndrehimpuls $L = 1$ eindeutig charakterisiert wird. Das Quadrat der Kopplungskonstanten $g_J$ stimmt bis auf Normierungsfaktoren mit diesem reduzierten Matrixelement überein. (10,18) enthält nichts anderes als die Umrechnung einer Partialwellenentwicklung mit $L\,S$-Kopplung auf eine solche mit Helizitätskopplung.

mit $z_s = \frac{t-2\mu^2}{\sqrt{4M^2-t}\sqrt{4\mu^2-t}}$ , $R^2 = \frac{1}{4}\frac{\mu^2}{M^2}(4M^2-\mu^2)$ , $\frac{4z_t}{2} = \frac{t}{2R^2}$

und für den Beitrag des Graphen b)

$$G^{3/2}(t,\ell,\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) + G^{3/2}(t,\ell,-\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) = -2\pi i \frac{g_{\pi_2}^2}{(4M^2-t)\sqrt{4\mu^2-t}} \sqrt{\tfrac{3}{2}}\,(1-(-1)^\ell)\,Q_\ell'(z_s)(z_t^2-1)\cdot \qquad (10,23)$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{\ell(\ell+1)}}\left\{\left[(M^2+m^2-\mu^2)\sqrt{1-\frac{R^2}{M^2}}\,\frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{-R^2}} + 2\,\frac{m}{M}\,R^2\right]\frac{1}{2}\,(-3z_t^2+2z_t+1) - (M^2+m^2-\mu^2)\frac{\sqrt{-t}}{\sqrt{-R^2}}\,\frac{z_t}{2}(3z_t+1)\right\}$$

$$G^{3/2}(t,\ell,\tfrac{1}{2},-\tfrac{1}{2}) - G^{3/2}(t,\ell,-\tfrac{1}{2},\tfrac{1}{2}) = 2\pi i \frac{g_{\pi_2}^2}{\sqrt{4M^2-t}\sqrt{4\mu^2-t}}\,\frac{1}{m}\sqrt{\tfrac{3}{2}}\,(1+(-1)^\ell)\,Q_\ell(z_s)\cdot$$

$$\cdot\left\{\sqrt{1-\frac{R^2}{M^2}}\,\frac{1}{2}\,(-3z_t^2+2z_t+1) - \frac{1}{2}\,(3z_t^2+2z_t-1)\right\} \qquad (10,24)$$

In (10,23) und (10,24) ist für $z_t$, $z_s$ und $R^2$ (10,11) und (10,20) einzusetzen, wobei $m$ gleich der Masse der $N^*$-Resonanz ist.

Zusammenfassung

Nach einer Zusammenstellung der für diese Arbeit wichtigen Ergebnisse der Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe $\mathcal{IL}_4$ in den ersten drei Kapiteln, wurden im 4. Kapitel zunächst zwei Entwicklungen für die T-Matrixelemente nach invarianten Amplituden (4,24) angegeben. Die möglichen kinematischen Singularitäten der invarianten Amplituden wurden an Hand von zwei Partialwellenanalysen,einer im "physikalischen Bereich des $s$ -Kanals"(7,7) , einer zweiten im "unphysikalischen Bereich des t-Kanals" (6,33) in den Kapiteln 5 bis 7 diskutiert. Die Untersuchung der Umkopplungskoeffizienten der beiden Sätze von invarianten Amplituden und die Tatsache, daß letztere nur kinematische Polstellen, keine kinematischen Verzweigungspunkte in der $s$ - und t-Ebene besitzen, erlaubten es, alle möglichen kinematischen Pole des ersten Satzes von invarianten Funktionen (6,35) bis auf eine einzige bei $t = 0$ , die des zweiten Satzes (7,7) bis auf eine bei $s=0$ auszuschließen (vgl. (7,38)). Die Forderung der Paritätsinvarianz legte es nahe, einen neuen Satz von invarianten Funktionen zu konstruieren; im Kap. 8 konnten wir sehen, wie dieser für den Fall der $\pi$N-Streuung auf die bekannten invarianten Funktionen A, B führt. Im Kap. 9 wurden die Racahkoeffizienten der inhomogenen Lorentzgruppe definiert als Umkopplungskoeffizienten zwischen den reduzierten Matrixelementen einer Partialwellenentwicklung im physikalischen Bereich des $s$ -Kanals und denen einer Partialwellenentwicklung im unphysikalischen Bereich des t-Kanals. Die Mandelstamdarstellung erlaubte es dann in Kap. 10 die reduzierten Matrixelemente (6,34) der Sommerfeld-Watson-Formel (6,33) analytisch fortzusetzen vom unphysikalischen Bereich des t-Kanals in den physikalischen, und sie anschließend mit den Partialwellenamplituden des t-Kanals zu identifizieren.

Mit Kap. 9 und 10 wurde somit eine Vorschrift gegeben, wie man aus den rechten Schnitten der Partialwellenamplituden des $s$ - und $u$ -Kanals die Partialwellenamplituden des t-Kanals berechnet, was an Hand eines Beispiels demonstriert wurde.

Herrn Prof. Dr. H. JOOS bin ich zu besonderem Dank verpflichtet für die Anregung zu dieser Arbeit und für zahlreiche Diskussionen, die ich mit ihm während meines einjährigen Aufenthaltes beim Deutschen-Elektronen-Synchrotron (DESY) in Hamburg führen konnte. Dieser Aufenthalt wurde ermöglicht durch ein Stipendium der Stiftung Volkswagenwerk.
Herrn Prof. Dr. W. THEIS danke ich für eine kritische Durchsicht des Manuskripts.

Anmerkungen und Literatur

1. Eine ausführliche Behandlung der Darstellungstheorie der inhomogenen Lorentzgruppe für den Fall reeller Massen findet man bei:
H. JOOS , Forts. d. Phys. 10 , 65 (1962)
Die Bezeichnungsweise dieser Arbeit wurde hier weitgehend übernommen.
Mc FARLANE , Rev. of Mod. Phys. 34 , 41 (1962)
E.P. WIGNER, Ann. of Math. 40, 149 (1939)
E.P. WIGNER, V. BARGMANN, Proc. of Nat Acad. Sci. USA 34, 211 (1948)

2. V. BARGMANN, Ann. of Mathem. 48, 568 (1947)
L. SERTORIO, M. TOLLER , Istituto di Fisica "G. Marconi" Universita di Roma, Noto Interna N 44 (1964)
M. TOLLER, Nota Interna N 64 (1964)

3. Yu M. SHIROKOV, Sov. Phys. JETP 6 , (33) 929 (1958)

4. Siehe Ref. 2. und 3.

5. Siehe Ref. 2

6. M. ANDREWS, J. GUNSON, J. Math. Phys. 5 , 1391 (1964)
Die Vollständigkeitsrelation (2,14) für die unitären Darstellungen der $L_3$ werden aus der Vollständigkeit der nicht unitären endlich dimensionalen Darstellungen gewonnen. Letztere wird ausführlich diskutiert in der Arbeit von L. EHRENPREIS, F. MAUTNER, Trans.of the Am. Mathem. Society 84 , 1 (1957)
Man vergleiche auch
L. EHRENPREIS und F. MAUTNER, Ann.of Math. 61 , 406 (1955)

7. ERDELYI, W. MAGNUS, F. OBERHETTINGER, F.G. TRICOMI "Higher Transcendental Functions" Mc. Graw Hill New York Bd. I, S. 174

8. R. STORA, P. MOUSSA, Lectures in Theoretical Physics Vol 7 A University of Colorado, Boulder (1964)

9. M. JACOB, G. WICK: Ann. of Phys. (N.Y.) 7 , 404 (1959)

10. G.W. MACHEY: The Theory of Group III (Lecture Notes, Summer 1955, Chicago)

11. Entsprechende Orthogonalitäts- und Vollständigkeitsrelationen für den Fall $p^2 > 0$ findet man in Ref. 1 , S. 110-113

12. A.O. BARUT, MUZINICH, WILLIAMS, Phys. Rev., 130, 442 (1963)

13. D.N. WILLIAMS, UCRL 11113 Preprint (1963)

14. Ref. 1 , S. 129

15. K. HEPP, Helv. Phys. Acta 36 , 355 (1963)

16. Die Behandlung des spinlosen Falls findet man u.a. auch bei H. LEHMANN: Nuov. Cim. Suppl. zu Bd. 14, 153 (1959)

17. Die Beschreibung von Teilchen mit Spin in der axiomatischen Feldtheorie wurde behandelt von G. ROEPSTORFF, Dissertation Hamburg (1964)

18. Umfangreiche Literaturangaben hierzu findet man in den folgenden Textbüchern:
E. SQUIRES,"Complex Angular Momenta and Particle Physics" Benjamin New York (1963)
M. FROISSART, R. OMNES:"Mandelstam Theory and Regge Poles" Benjamin New York (1963)
S. FRAUTCHI: "Regge Poles and S-Matrix Theory" Benjamin New York (1963)

19. T. REGGE, Nuov. Cim 14 , 951 (1959)

20. SERTORIO, M. TOLLER, Ref. 2

21. F.T. HADJIONNON, CERN Preprint TH 612 (1959)
J.F. BOYCE, ICTP Preprint /C/66/30 (1966)

22. H. JOOS: Lectures in Theoretical Physics VII A , S. 132 Boulder (Colorado) 1964

23. KRETZSCHMAR: Nuov . Cim. 32 , 1405 (1964)

24. Sommerfeld-Watson-Formeln der Art (6, 33) für invariante Amplituden wurden bereits in einer Reihe von Spezialfällen diskutiert. Z.B. wurde der Fall der Photopion-Produktion behandelt von: G. KRAMER, P. STICHEL, Zeitschrift für Physik 178, 519 (1964)

25. M. GELL-MANN, M.L. GOLDBERGER, F.E. LOW, F. ZACHARIASEN, P.R. 113, B 145 (1964)

26. Ähnliche Umkopplungskoeffizienten für die Helizitätsamplituden im $s$ und t Kanal wurden untersucht von T.L. TRUEMAN, G.C. WICK, Ann. of Phys. (N.Y.), 26, 44 (1964) Ihre Bedeutung für die Untersuchung von kinematischen Singularitäten wurde schon von Yasuo HARA, Phys. Rev. 136, B 507 (1964) erkannt.

27. Man vergleiche die Kovarianten der Entwicklung (8,16) mit den von H. JOOS in Ref. 1. S. 133 konstruierten. Während die unsrigen auf die invarianten Funktionen A, B führen, die bekanntlich frei von kinematischen Singularitäten sind, lautet bei H. JOOS die kovariante Entwicklung (im CMS des $s$ -Kanals)

$$\langle \nu'' s_3'' q' | T | \nu' s_3' q' \rangle = \frac{1}{4\pi} \left( g_1 \delta_{s_3' s_3''} - g_4 \frac{i}{\sqrt{6}\, |\vec{n}'| |\vec{n}''|} (\vec{n}' \times \vec{n}'') \vec{\sigma}_{s_3'' s_3'} \right)$$

Die Amplituden $g_1$ und $g_4$ sind dann nach unserer Definition nicht frei von kinematischen Singularitäten. Ihre Bedeutung liegt in ihrer einfachen physikalischen Interpretation. Legen wir den Impuls des einlaufenden Nukleons in $z$ -Richtung so ist $g_1$ die "no-spin-flip" - $g_4$ die "Spinflip" - Amplitude.

28. Implizit sind solche Relationen auch enthalten in der Arbeit von J. MUZINICH, Journ. of Math. Phys. 5, 1481 (1964)

Lebenslauf

Am 22.5.1940 wurde ich als Sohn des Kaufmanns Johann Mütter und seiner Ehefrau Magda Mütter, geb. Küppers, in Kleve geboren.
Nach dem Besuch der Grundschule von 1946 bis 1950 und des Staatlichen Gymnasiums in Kleve, an dem ich 1959 die Reifeprüfung abgelegt habe, begann ich das Studium der Physik an der Technischen Hochschule Aachen.
Nach Absolvierung der Vordiplomprüfung immatrikulierte ich mich im Sommersemester 1961 an der Freien Universität Berlin. Im Wintersemester 1963 legte ich die Diplomprüfung in Physik ab.
Die Stiftung Volkswagenwerk gewährte mir vom 1.3.1964 bis zum 28.2.66 ein Doktorandenstipendium, das mir einen einjährigen Aufenthalt beim Deutschen Elektronen Synchrotron (DESY) in Hamburg ermöglichte.
Unter der Leitung von Herrn Prof. Dr. JOOS begann ich dort mit meiner Dissertation. Im Oktober 1965 kehrte ich nach Berlin zurück.
Seit dem 1.3.1966 bin ich Assistent am Institut für Theoretische Physik der Freien Universität Berlin.